

平面弹性周期问题概论

路见可　蔡海涛　著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

责任编辑　顾素萍
责任校对　黄添生
版式设计　詹锦玲
封面设计　罗　π

ISBN 978-7-307-06145-3



定价: 17.00元



平面弹性周期问题概论

路见可 蔡海涛 著


WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面弹性周期问题概论/路见可,蔡海涛著.—武汉:武汉大学出版社,2008.6
现代数学专著版
ISBN 978-7-307-06145-3

Ⅰ.平… Ⅱ.①路… ②蔡… Ⅲ.弹性理论 Ⅳ.O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 016225 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北民政印刷厂
开本:720×1000　1/16　　印张:10.25　字数:145 千字　插页:1
版次:2008 年 6 月第 1 版　　2008 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06145-3/O·381　　定价:17.00 元

内容提要

本书主要论述各向同性与各向异性平面弹性理论的一些周期问题，其中包括周期第一基本问题、周期第二基本问题、周期混合问题、周期接触问题，以及周期裂纹问题等；同时，也论及了某些周期运动载荷问题. 此外，还扼要论述了平面弹性的双周期问题；在附录中，还介绍了循环周期问题. 所应用的主要数学工具是复变函数论与奇异积分方程. 本书内容是作者们从 20 世纪 60 年代以来在这方面的工作成果.

本书可供应用数学与力学工作者、工程技术人员以及有关专业的教师参考，同时可作为高年级大学生和研究生用的教材或教学参考书.

序

弹性理论中周期问题的研究，在固体力学和断裂理论中占有重要地位；在实际工程设计中，这些研究也很重要．关于平面弹性的周期问题，用复变函数论作为研究的数学工具，非常有效，极其完美．我们曾撰写了《平面弹性理论的周期问题》一书(1986年由湖南科学技术出版社出版)，但市面上早已售罄．因此我们决定将其改写面世，以飨读者．在改写中，我们删减了一些材料，改进了某些论述，使之更为紧凑和准确．原书只讨论了单周期问题．在这次改写中，我们增加了有关双周期问题的论述；并为完整起见，还在附录中，对循环周期问题作了简单的介绍．值得指出的是，书中所得到的解答都给出了封闭形式，这在实际应用和具体计算时特别方便．

全书共分六章．第一章对解析函数的周期边值问题作了细致的论述，这是全书论证的数学基础．第二章讨论了各向同性平面弹性理论的各种周期问题．第三章推广了第二章的理论与方法，讨论了各向异性平面弹性的各种周期问题．第四章讨论了各向同性弹性半平面边界上具有周期运动载荷的动态平衡问题．第五章就各向同性和各向异性弹性平面的周期裂纹问题作了较详细的论述．第六章扼要论述了双周期的平面弹性问题．最后在附录中还简要介绍了平面弹性的循环周期问题．

虽然我们在写作中尽了极大努力，但书中不妥和错误之处仍在所难免，尚祈广大读者不吝指正．

路见可　蔡海涛

2008年3月

目　录

第一章

解析函数的周期边值问题

为讨论平面弹性理论的周期问题提供数学工具，需要讨论解析函数的周期边值问题. 后者在路见可[6]中已有详尽的论述. 为了本书的需要，本章将只复述其中两种周期边值问题，即周期 Riemann 边值问题与关于半平面的周期 Riemann-Hilbert 边值问题. 上述周期边值问题的更一般形式是自守函数的边值问题，曾为 Ф. Д. Гахов 与 Л. И. Чибрикова 所研究. 从实用观点看，周期边值问题将更为重要. 本章和以后各章所论及的周期问题，是实际中常遇见的单周期问题.

本章 1.1，1.2 节考虑周期 Riemann 问题，这里是使用保角变换的方法；1.3 节考虑关于半平面的周期 Riemann-Hilbert 问题，在讨论中直接应用了推广的 Plemelj 公式.

1.1 周期 Riemann 边值问题，封闭曲线情况

1.1.1 问题的提法

设 $L_k(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为无穷个封闭的光滑曲线，它们彼此形状相同，互不相交，且以 $a\pi$ 为周期水平地排列($a>0$)，如图 1.1 所示①.

取各 L_k 的反时针向为正向，其内域记作 S_k^+，而 $L=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}L_k$ 的外域记作 S^-. 不妨选择原点 O 在 S_0^+ 内，且使 $\pm\frac{1}{2}a\pi,\pm\frac{3}{2}a\pi,\cdots$ 都在 S^- 内. 这是可

---

① 以下为行文简便起见，只假定 L_k 是一个封闭曲线；实际上，如 L_k 是一组有限个封闭曲线时，以下的讨论只要略加修改，仍成立. 又若 L_0 是联结 $\pm\frac{1}{2}a\pi+\mathrm{i}y_0$ 的任一光滑弧段时，本节所论作适当修正后，也完全成立.

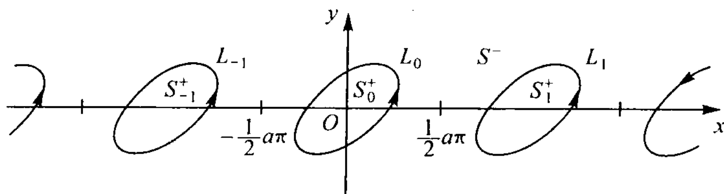


图 1.1

能的，必要时将坐标轴作适当平移即可.

周期 Riemann 边值问题（简称问题 P_1）提法如下：要求一以 $a\pi$ 为周期的、在全平面中分片全纯的函数 $\Phi(z)$（在 S_k^+，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 和 S^- 内全纯），使

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L, \tag{1.1}$$

其中 $G(t),g(t)$ 已给在 L 上，均 $\in H$（即满足 Hölder 条件），并且 $G(t)\neq 0$（正则型），此外，它们都以 $a\pi$ 为周期：

$$G(t+a\pi)=G(t),\ g(t+a\pi)=g(t),\quad t\in L;$$

而 $\Phi^\pm(t)$ 分别表示 $\Phi(z)$ 当 z 从 L 的正（左）侧和负（右）侧趋于 L 上的 t 点时的边值（即极限值）.

这里，一函数 $f(t)\in H$（Hölder 连续）于 L 上是指 $f(t)$ 满足

$$|f(t)-f(t')|\leqslant A|t-t'|^\mu,\quad \forall t,t'\in L,$$

其中 A,μ 为正常数，且 $0<\mu\leqslant 1$.

注意，∞ 点是各曲线 L_k 的聚点，故上述问题的解（如果存在）在 $z=\infty$ 处一般不能有确定的极限. 但是当 $z=\pm\infty\mathrm{i}$（指 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x 任意，$y\to\pm\infty$）时，可以对 $\Phi(z)$ 提出一定的要求. 这种补充的要求可以是各种各样的；但在本书中，恒只要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界（亦即有限）.

当 $g(t)\equiv 0$ 时，问题称为齐次的，记作 P_1^0；否则，称为非齐次的.

在问题中，我们已要求解 $\Phi(z)$ 也以 $a\pi$ 为周期；这从解决实际问题的观点来看，是合适的. 但注意这一要求不能认为是问题的必然结果. 因为，例如，对于齐次问题 P_1^0 而言，若 $\Phi_1(z)$ 是它的一个非零周期解，则 $\Phi_1(z)I(z)$ 也是它的解. 其中 $I(z)$ 为任何整函数，这个解就不一定以 $a\pi$ 为周期了. 而且也容易证明，任何非周期解一定是上述形式. 以后所称的解都是指周期解，以 $a\pi$ 为周期.

1.1.2 转化为经典 Riemann 边值问题

作带形 $S_0: |\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2}a\pi$. 暂设 L_0 全在 S_0 中. 记 $S_0^- = S^- \cdot S_0$，并在直线 $x = \pm \frac{1}{2}a\pi$ 上取定正向使 S_0^- 在其右侧(图 1.2). 如 $\Phi(z)$ 为原问题的解，其在 $S_0 = S_0^+ + S_0^-$ 中的部分记作 $\Phi_0(z)$，则 $\Phi_0(z)$ 是 S_0 中分片全纯的函数，连续到 $x = \pm \frac{1}{2}a\pi$ 上，且满足条件

图 1.2

$$\Phi_0^+(t) = G(t)\Phi_0^-(t) + g(t), \quad t \in L_0; \tag{1.2}$$

$$\Phi_0\left(\frac{1}{2}a\pi + \mathrm{i}y\right) = \Phi_0\left(-\frac{1}{2}a\pi + \mathrm{i}y\right), \quad |y| < +\infty. \tag{1.3}$$

反之，如 $\Phi_0(z)$ 为 S_0 中满足(1.2)和(1.3)的一个分片全纯函数，连续到 $z = \pm \frac{1}{2}a\pi$ 上者，则把它作 $a\pi$ 的周期性延拓后，便得原问题的一个解 $\Phi(z)$.

于是，问题 P_1 就转变为求 S_0 中分片全纯的函数 $\Phi_0(z)$，连续到 $x = \pm \frac{1}{2}a\pi$ 上，使满足条件(1.2) 和(1.3). 把这一问题记作 R_1.

注意，可能 L_0 部分地越出带形 $|\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2}a\pi$ (图 1.3). 这时，我们只要把它略加修改，即用二周期合同的 Jordan 弧段代替 $x = \pm \frac{1}{2}a\pi$ 上的二直线段，使 S_0^+ 整个落在这样所得出的弯曲带形 S_0 中；不妨假定仍旧保持$z = \pm \frac{1}{2}a\pi$ 二点在 S_0 的边界上. 仍旧记 $S_0^- = S_0 - S_0^+$. 用函数

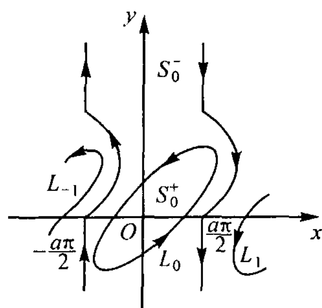


图 1.3

$$\zeta = \tan \frac{z}{a} \tag{1.4}$$

把带形 S_0 映射到 ζ 平面中的区域 Σ_0. 在图 1.2 的情况下，它是由整个 ζ 平面沿着虚轴在区间$[-\mathrm{i}, \mathrm{i}]$之外剖开而成的，且 $z = 0, \pm \frac{1}{2}a\pi, +\infty\mathrm{i}, -\infty\mathrm{i}$ 分别

变为$\zeta=0,\infty,\mathrm{i},-\mathrm{i}$，而直线$x=\pm\frac{1}{2}a\pi$变成了剖线的左、右岸．这时，$L_0$变成某一光滑曲线$\Gamma_0$，它围住原点$O$，但$\zeta=\pm\mathrm{i}$则在其外，且不与剖线相交(图1.4)．在图1.3的情况下，则剖线的形状有所改变，但Γ_0仍不穿过剖线，且也具有上述的一些其它性质(图1.5)．Γ_0的内域记作Σ_0^+，外域记作Σ_0^-.

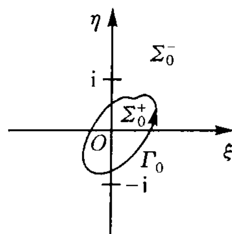


图 1.4

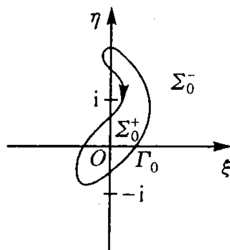


图 1.5

记$\Phi_0(z)$经变换后成为$\Phi_*(\zeta)$，由条件(1.3)可知，它在剖线两侧有相同极限值．故知$\Phi_*(\zeta)$是ζ平面中的分片全纯函数(在$\zeta=\infty$处有界!)，且满足条件

$$\Phi_*^+(\tau)=G_*(\tau)\Phi_*^-(\tau)+g_*(\tau),\quad \tau\in\Gamma_0, \tag{1.5}$$

其中$G_*(\tau),g_*(\tau)$分别为$G(t),g(t)$变换后的结果，它们仍都$\in H$，且$G_*(\tau)\neq 0$．于是问题化为了经典的Riemann问题．但要注意，$\zeta=\pm\mathrm{i}$现在一般是$\Phi_*(\zeta)$的孤立奇点.

我们称

$$\mathrm{Ind}_{L_0}G(t)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_0}=k \tag{1.6}$$

为原问题P_1的**指标**，这里(以及以后)$[f(t)]_{L_0}$表示当t沿L_0正向环行一周时函数$f(t)$的改变量．显然它就是转化后Riemann问题的指标：

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}G_*(\tau)=\mathrm{Ind}_{L_0}G(t)=k.$$

1.1.3 齐次问题 P_1^0 的讨论

这时，$g(t)\equiv 0$，于是$g_*(\tau)\equiv 0$．分几种情况讨论.

我们已要求$\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$有界，这是要求$\Phi_*(\zeta)$在$\zeta=\pm\mathrm{i}$处也有界，即正则，这时问题(1.5)的一般解为

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)P_k(\zeta), \tag{1.7}$$

其中

$$X_*(\zeta)=\begin{cases}X_*^+(\zeta)=\mathrm{e}^{\Gamma_*(\zeta)}, & \zeta\in\Sigma_0^+,\\ X_*^-(\zeta)=\zeta^{-k}\mathrm{e}^{\Gamma_*(\zeta)}, & \zeta\in\Sigma_0^-.\end{cases}\tag{1.8}$$

这里

$$\Gamma_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\frac{\log\tau^{-k}G_*(\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau,\tag{1.9}$$

而 $P_k(\zeta)$ 是 k 次任意多项式 ($k<0$ 时，认为 $P_k(\zeta)\equiv 0$).

回到 z 平面，则有

$$\Phi_0(z)=X_0(z)P_k\left(\tan\frac{z}{a}\right),\tag{1.10}$$

这里

$$X_0(z)=\begin{cases}X_0^+(z)=\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z\in S_0^+,\\ X_0^-(z)=\cot^k\dfrac{z}{a}\,\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z\in S_0^-,\end{cases}\tag{1.11}$$

而

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{\log\left(\cot^k\dfrac{t}{a}\,G(t)\right)}{\tan\dfrac{t}{a}-\tan\dfrac{z}{a}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2\dfrac{t}{a}}\\&=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\log\left(\cot^k\frac{t}{a}\,G(t)\right)\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\log\left(\cot^k\frac{t}{a}\,G(t)\right)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+C.\end{aligned}$$

把常数 C 并入 P_k 中，因此可以认为

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\log\left(\cot^k\frac{t}{a}\,G(t)\right)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t,\tag{1.12}$$

其中对数可以任意取定一支.

如将 $\Phi_0(z)$ 作周期 $a\pi$ 的延拓，并注意到(1.10)～(1.12)诸分析式中所出现的函数均为以 $a\pi$ 为周期，故不加改变，立即得到原问题 P_1^0 的一般解:

$$\Phi(z)=X(z)P_k\left(\tan\frac{z}{a}\right);\tag{1.10$'$}$$

$$X(z)=\begin{cases}X^+(z)=\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z\in S^+,\\ X^-(z)=\cot^k\dfrac{z}{a}\,\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z\in S^-,\end{cases}\tag{1.11$'$}$$

而 $\Gamma(z)$ 仍以(1.12)式给出. $X(z)$ 仍称为问题 P_1 的**典则函数**. 这个一般解还可写成

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^{+}(z)=\dfrac{1}{\cos^{k}\dfrac{z}{a}}e^{\Gamma(z)}Q_{k}\left(\sin\dfrac{z}{a},\cos\dfrac{z}{a}\right), & z\in S^{+},\\ \Phi^{-}(z)=\dfrac{1}{\sin^{k}\dfrac{z}{a}}e^{\Gamma(z)}Q_{k}\left(\sin\dfrac{z}{a},\cos\dfrac{z}{a}\right), & z\in S^{-},\end{cases} \tag{1.13}$$

其中 $Q_k(X,Y)$ 是 X,Y 的任意 k 次齐次多项式($k<0$ 时，$Q_k\equiv 0$).

因此，我们得到

定理 1.1 (Чибрикова) *如要求 $\Phi(\pm\infty i)$ 有界，则齐次周期问题 P_1^0 当指标 $k\geqslant 0$ 时，问题有 $k+1$ 个线性无关解；当 $k<0$ 时，问题只有零解.*

附带指出，因为

$$\cos^{n-j}z\ \sin^{j}z=\sum_{\lambda=0}^{n}C_{nj}(\lambda)e^{i(n-2\lambda)z},$$

其中 $C_{nj}(\lambda)$ 为某些常数，故知：当 $k=2m$ 为偶数时，还可写

$$Q_{2m}\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right)=\alpha_0+\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_j\cos\frac{2jz}{a}+\beta_j\sin\frac{2jz}{a}\right); \tag{1.14}$$

当 $k=2m+1$ 为奇数时，还可写

$$Q_{2m+1}\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right)=\sum_{j=0}^{m}\left(\alpha_j\cos\frac{(2j+1)z}{a}+\beta_j\sin\frac{(2j+1)z}{a}\right). \tag{1.14$'$}$$

因此，在一般解(1.13)中，也可把 Q_k 写成上述形式的任意三角多项式. □

1.1.4 非齐次问题 P_1 的讨论

我们将反复应用下面的重要公式：

推广的 Plemelj 公式 *如果 $g(t)\in H$，以 $a\pi$ 为周期，而*

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,dt,$$

则

$$\Psi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}g(t_0)+\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,dt,\quad t_0\in L, \tag{1.15}$$

其中右端的积分要理解为 Cauchy 主值积分，称为含 Hilbert 核的积分.

为了证明其成立，只要将 $\cot\dfrac{t-t_0}{a}$ 在 $t=t_0$ 点处的主部 $\dfrac{a}{t-t_0}$ 分离出来，

然后应用熟知的 Plemelj 公式(见 Мусхелишвили [1] 或路见可[6]) 即可.

现在来讨论非齐次问题 $P_1(1.1)$.

这时 $g(t)\not\equiv 0$, 从而 $g_*(\tau)\not\equiv 0$.

当 $k\geqslant -1$ 时, 问题(1.5) 的一般解为

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)(\Psi_*(\zeta)+P_k(\zeta)),$$

其中

$$\Psi_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{g_*(\tau)}{X_*^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-\zeta};$$

当 $k<-1$ 时, 当且仅当满足 $-k-1$ 个条件

$$\int_{\Gamma_0}\frac{g_*(\tau)}{X_*^+(\tau)}\tau^{j-1}d\tau=0,\quad j=1,2,\cdots,-k-1$$

时才有唯一解.

回到 z 平面, 当 $k\geqslant -1$ 时, 问题 P_1 的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)\left(\Psi(z)+P_k\left(\tan\frac{z}{a}\right)\right),\tag{1.16}$$

其中

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\cot\frac{t-z}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)dt.\tag{1.17}$$

当 $k\geqslant 0$ 时, 可把上式右端括号中后一项略去, 并入 P_k 的常数项中, 而有

$$\Psi(z)=\frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}\frac{g(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,dt;\tag{1.17$'$}$$

但当 $k=-1$ 时, 此项不能略去, 以保证当 $z=\pm\frac{1}{2}a\pi$ 时 $X(z)\Psi(z)$ 有界. 当 $k<-1$ 时, 当且仅当满足 $-k-1$ 个条件

$$\int_{L_0}\frac{g(t)\sin^{j-1}\frac{t}{a}}{X^+(t)\cos^{j+1}\frac{t}{a}}dt=0,\quad j=1,2,\cdots,-k-1\tag{1.18}$$

时有唯一解(1.16), 这时 $P_k\equiv 0$—— 且这时 $\Psi(z)$ 必须以(1.17) (而不能由(1.17)$'$) 给出.

这样, 我们得到

定理 1.2 (Чибрикова)　如要求 $\Phi(\pm\infty i)$ 有界, 则非齐次问题 P_1 当 $k\geqslant -1$ 时, 问题的一般解中含 $k+1$ 个任意常数; 当 $k<-1$ 时, 当且仅当满足 $-k-1$ 个条件(1.18) 时有唯一解.

1.1.5 一个特例

考虑 $G(t) \equiv K$ 为一常数($\neq 0$) 的特殊情形，这在应用中常见.

这时，指标 $k=0$，于是

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_{L_0}\log K\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=\frac{\log K}{2\pi \mathrm{i}}\left[\log\sin\frac{t-z}{a}\right]_{L_0}$$

$$=\begin{cases}\log K, & z\in S^+,\\ 0, & z\in S^-.\end{cases}$$

因此，$X^+(z)=K$，$X^-(z)=1$. 所以，使 $\Phi(\pm\infty \mathrm{i})$ 有界的一般解是

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+C, & z\in S^+,\\ \dfrac{1}{K}\left(\dfrac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+C\right), & z\in S^-.\end{cases}\tag{1.19}$$

这直接由推广的 Plemelj 公式也可验证.

1.2 周期 Riemann 边值问题，开口弧段和间断系数情况

1.2.1 开口弧段的情况

这里，考虑 L_0 是由 p 个开口光滑弧段$\widehat{a_rb_r}(r=1,2,\cdots,p)$ 构成的情况，而 $G(t),g(t)$ 在每一弧段上连端点在内均 $\in H$，且 $G(t)\neq 0$. 每一弧段设以 a_r 为起点，b_r 为终点，而构成正向.

把 a_r,b_r 统一记作 $c_1,c_2,\cdots,c_{2p}$，和经典情况一样，可以把它们分成如下两类：在每一$\widehat{a_rb_r}$ 上，任取 $\log G(t)$ 的一支，设

$$\mp\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\log G(c_j)=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j,\quad j=1,2,\cdots,2p.$$

这里，当 $c_j=a_r$ 时，左边取负号，当 $c_j=b_r$ 时，取正号. 如 α_j 为一整数，则称 c_j 为一**特殊端**；如 α_j 不是整数，则称 c_j 为**平常端**. 记所有平常端为 c_1，$c_2,\cdots,c_m$，特殊端为 $c_{m+1},c_{m+2},\cdots,c_{2p}$.

我们要求(1.1) 的分片全纯周期解，使在平常端 $c_1,c_2,\cdots,c_q(q\leqslant m)$ 附近保持有界，而在其余端点附近，至少无界可积. 把这种解仍称作属于 $h_q=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类. 和经典情况一样，可以证明，这样的解如存在，它在特殊

端附近必几乎有界：

$$\lim_{z\to c_j}(z-c_j)^{\varepsilon}\Phi(z)=0 \quad (j>m),$$

ε 为任意小正数. 如果解在所有端点附近有界，则称它**属于 h_0 类**.

定义问题(1.1)的指标如下. 对于特殊端 c_j，令 $\lambda_j=-\alpha_j$；对于平常端 c_j，当 $j\leqslant q$ 时，选取整数 λ_j 使 $0<\alpha_j+\lambda_j<1$，当 $j>q$ 时，使 $-1<\alpha_j+\lambda_j<0$，称

$$k=-\sum_{j=1}^{2p}\lambda_j \tag{1.20}$$

为问题(1.1) **关于类 h_q 的指标**.

仍用(1.4)变换到 ζ 平面，问题就转化为(1.5). 因为 L_0 都不经过(1.4)的奇点，所以 $G_*(\tau),g_*(\tau)$ 在 Γ_0 上仍保有原来的性质，且各端点的类型也不变. 因此，求原问题(1.1)在类 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 中的解，就变成求(1.5)在类 $h(c_1^*,c_2^*,\cdots,c_q^*)$ 中的解，这里

$$c_j^*=\tan\frac{c_j}{a}\quad (j=1,2,\cdots,2p),$$

但在 $\zeta=\pm\mathrm{i}$ 处仍保留有任意性，而 $\Phi_*(\infty)$ 则必须有界.

现在来讨论齐次问题 P_1^0.

我们知道，齐次问题(1.5) $(g_*(\tau)\equiv 0)$ 的解，在特殊端附近，必定有界；在平常端附近，如有界，则必为零(见路见可[6]). 显然，齐次问题 P_1^0 的解也有类似性质.

这时问题(1.5)在 h_q 类中的一般解为

$$\Phi_*(\zeta)=X_*(\zeta)P_k(\zeta).$$

其中 $X_*(\zeta)=\Pi_*(\zeta)\mathrm{e}^{\Gamma_*(\zeta)}$，而

$$\Pi_*(\zeta)=\prod_{j=1}^{2p}(\zeta-c_j^*)^{\lambda_j},\quad \Gamma_*(\zeta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\frac{\log G_*(\tau)}{\tau-\zeta}\mathrm{d}\tau.$$

回到 z 平面，得(1.1)在 h_q 类中的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P_k\left(\tan\frac{z}{a}\right), \tag{1.21}$$

其中典则函数

$$X(z)=\Pi(z)\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, \tag{1.22}$$

而

$$\Pi(z)=\prod_{j=1}^{2p}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{c_j}{a}\right)^{\lambda_j}, \tag{1.23}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} \log G(t)\ \cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t. \tag{1.24}$$

如再把 $\Pi(z)$ 的一常数因子并入 P_k 中，则一般解(1.21)还可写成

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^{2p} \sin^{\lambda_j}\frac{z-c_j}{a}\ \mathrm{e}^{\Gamma(z)} Q_k\left(\sin\frac{z}{a},\cos\frac{z}{a}\right). \tag{1.23$'$}$$

注意，上节定理1.1仍成立①.

对于非齐次问题 P_1，和经典情况一样，在特殊端 c_j 附近，如 $G(c_j)\neq 1$，则 $\Phi(z)$ 仍有界；如 $G(c_j)=1$，则一般 $\Phi(z)$ 只能是几乎有界(具对数奇异性)，除非 $g(c_j)=0$.

1.2.2 一个重要特例

为以后应用的需要，考虑下列情况：L_0 只含 x 轴上一线段 γ_0：$-l\leqslant t\leqslant l$ $\left(l<\frac{1}{2}a\pi\right)$，且 $G(t)=-K$ 是一负常数的情形．并求在类 h_0 中的解，即在 $z=\pm l$ 处允许无界可积的解.

这里 $c_1=-l$，$c_2=+l$，取 $\log(-K)=\ln K+\pi\mathrm{i}$ (我们恒用 $\ln K$ 表示正数 K 的实值对数)，因此

$$\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta,\quad \alpha_2+\mathrm{i}\beta_2=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta,$$

其中已设

$$\beta=\frac{\ln K}{2\pi}. \tag{1.25}$$

因此，它们都是平常端，且在 h_0 类中，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，即指标 $k=1$. 这时易见

$$\Gamma(z)=\frac{\log(-K)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta\right)\ln\frac{\tan\dfrac{z}{a}-\tan\dfrac{l}{a}}{\tan\dfrac{z}{a}+\tan\dfrac{l}{a}},$$

从而

$$X(z)=\Pi(z)\mathrm{e}^{\Gamma(z)}=\left(\tan\frac{z}{a}+\tan\frac{l}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{l}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta}, \tag{1.26}$$

这里已设 z 平面沿 γ_0 剖开，且 $X(z)$ 已任意取定一支，例如

---

① 当然，要把解理解为 h_q 类中的解，k 理解为 h_q 类中的指标.

$$\lim_{z\to\pm\frac{1}{2}a\pi}\tan\frac{z}{a}X(z)=1. \tag{1.27}$$

因此，由于要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界，则问题的一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+X(z)\left(C_0\tan\frac{z}{a}+C_1\right). \tag{1.28}$$

特别，如 $G(t)=-1$，即 $K=1$，则由(1.25)，$\beta=0$，于是

$$X(z)=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{R(z)}},\quad R(z)=\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z}{a}, \tag{1.26$'$}$$

其中$\sqrt{R(z)}$已取定这样的一支：当 z 由上半平面趋于 γ_0 上的点时，$\sqrt{R(t)}$ 取正值.

这时一般解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}g(t)\sqrt{R(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+\frac{C_0\tan\frac{z}{a}+C_1}{\sqrt{R(z)}}. \tag{1.27$'$}$$

1.2.3 间断系数情况

设 L_0 如1.1节，而 $G(t)$，$g(t)$ 在 L_0 上有有限个第一类间断点(包括 L_0 的端点在内) $c_1,c_2,\cdots,c_p$，它们称为**节点**，在每一以两相邻间断点为端点的“连续弧”上(连同端点在内)，均 $\in H$，且 $G(t)\neq 0$.

仍与通常一样，如 $G(c_j+0)/G(c_j-0)$ 不是整数，则称 c_j 为**平常节点**，记作 $c_1,c_2,\cdots,c_m$；如它是整数，则称 c_j 为**特殊节点**，记作 $c_{m+1},c_{m+2},\cdots,c_p$. 要求问题(1.1)在类 $h_q=h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ $(q\leqslant m)$ 中的解，即在 $c_1,c_2,\cdots,c_q$ 附近有界，而在其余节点附近至少无界可积(在特殊端附近，必几乎有界).

类似地定义指标：从某一端点开始，沿 L_0 正向环行，在第一“连续弧”上任取 $\log G(t)$ 的一支，而在每越过一间断点 c_j 时，取 $\log G(c_j+0)$ 的一支如下：设

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(\log G(c_j+0)-\log G(c_j-0))=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j, \tag{1.29}$$

如 c_j 为特殊端，则使 $\alpha_j=0$；如 c_j 为平常端，当 $j\leqslant q$ 时，则使 $0<\alpha_j<1$，当 $m\geqslant j>q$ 时，则使 $-1<\alpha_j<0$. 这样，直到出发的端点的正侧为止. 我们称

$$k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\log G(t)]_{L_0}=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_0} \tag{1.30}$$

(包括各间断点处的跳跃)为问题(1.1) **属于类 h_q 的指标**. 定出指标后，1.1节中的一切讨论，甚至所有公式，均可在这里适用，因而不再重复.

1.3 关于半平面的周期 Riemann-Hilbert 边值问题

1.3.1 问题的提法

设 L_k 是实轴上由 $-\frac{1}{2}a\pi+\frac{1}{2}ka\pi$ 到 $\frac{1}{2}a\pi+\frac{1}{2}ka\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 长 $a\pi$ $(a>0)$ 的线段. 于是 $\{L_k\}$ 为一组以 $a\pi$ 为周期的线段，其并为整个实轴. 记 $S^{\pm}$ 分别为上半平面和下半平面.

半平面的 **Riemann-Hilbert 边值问题**①为：求出 S^- 中以 $a\pi$ 为周期的全纯函数 $W(z)=u-\mathrm{i}v$，满足边值条件

$$a(x)u+b(x)v=F(x),\quad x\in L_k,\ k=0,1,2,\cdots,\tag{1.31}$$

其中 $a(x),b(x)$ 与 $F(x)$ 为以 $a\pi$ 为周期的已知函数，在 x 轴上分段 Hölder 连续，亦即，在每一 L_k 上有有限个第一类间断点(称为节点)，而在两相邻间断点之间的闭子区间上 $\in H$，且设 $a(x)$ 与 $b(x)$ 没有公共零点. 不失一般性，恒可设所有这些函数在 $x=\pm\frac{a\pi}{2}$ (及其合同点) 处连续，而

$$u=u^-(x),\quad v=v^-(x).$$

在实际问题中，对 $W(z)$ 在 L_k 上诸节点处要有所限制. 为确定起见，我们将在最“宽”的类中求解，即要求 $W(z)$ 在所有节点处有可积奇异性，且在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处有界.

如 $F(x)\equiv 0$，则称(1.31)为**齐次的**，否则，称为**非齐次的**. (1.31)的一般解(如果有的话)具下面形式：

$$W(z)=W_0(z)+W_1(z),\tag{1.32}$$

其中 $W_0(z)$ 是相应齐次问题的一般解，$W_1(z)$ 为其一特解(此特解在节点处即使有界也可).

1.3.2 解法的梗概

(1.31) 可改写成

---

① 有些作者称之为 Hilbert 边值问题.

$$\mathrm{Re}\{(a(x)+\mathrm{i}b(x))W^-(x)\}=F(x),\quad x\in L_0 \tag{1.33}$$

(由周期性，对 $x\in L_k$，$k=\pm1,\pm2,\cdots$，亦然)，或即

$$(a(x)+\mathrm{i}b(x))W^-(x)+(a(x)-\mathrm{i}b(x))\overline{W^-(x)}=2F(x),\quad x\in L_0. \tag{1.33'}$$

在 S^+ 中定义一周期函数

$$\overline{W}(z)=\overline{W(\overline{z})},\quad z\in S^+. \tag{1.34}$$

易证 $\overline{W}(z)$ 在 S^+ 内全纯且有边值

$$\overline{W}^+(x)=\overline{W^-(x)},\quad x\in L_0.$$

然后我们定义一周期分片全纯函数

$$\Omega(z)=\begin{cases}\overline{W}(z), & z\in S^+,\\ W(z), & z\in S^-,\end{cases} \tag{1.35}$$

它以 x 轴为跳跃曲线. 今后对任何函数 $f(z)$ ($\mathrm{Im}z\neq0$)，定义函数 $\overline{f}(z)=\overline{f(\overline{z})}$. 易于验证

$$\overline{\Omega}(z)=\Omega(\overline{z}),\quad \mathrm{Im}z\neq0, \tag{1.36}$$

从而

$$\overline{\Omega}^\pm(x)=\overline{\Omega^\mp(x)},\quad x\in L_0.$$

这样，(1.33)′ 可改写为

$$\Omega^+(x)=-\frac{a(x)+\mathrm{i}b(x)}{a(x)-\mathrm{i}b(x)}\Omega^-(x)+\frac{2F(x)}{a(x)-\mathrm{i}b(x)},\quad x\in L_0. \tag{1.37}$$

这是一正则型的周期 Riemann 边值问题(因为 $a(x)\pm\mathrm{i}b(x)\neq0$ 于 L_0 上).

如前，我们可定义平常节点和特殊节点，在 h_q 类中的指标和解. 现在，问题已转化为(1.37) 在 h_0 类中求解. 因为要求 $W(-\infty\mathrm{i})=\Omega(-\infty\mathrm{i})$ 有界且

$$\Omega(+\infty\mathrm{i})=\overline{\Omega(-\infty\mathrm{i})}, \tag{1.38}$$

所以 $\Omega(+\infty\mathrm{i})$ 也必须有界.

但是，当且仅当(1.36) 满足时，(1.37) 的一个解也是(1.33) 的一个解(在同一类中)，并且后者的解由 $\Omega^-(z)$ 给出，亦即当 $z\in S^-$ 时的 $\Omega(z)$. 这样，问题(1.31) 等价于问题(1.37) 并补充要求条件(1.36) 以及 $\Omega(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界，因而可按前段中所示的方法求解.

关于本问题的详细论述，可参看路见可[6].

1.3.3 一个重要特殊情况

我们要给出一个特殊但很重要情况的解，它在实用中常会出现，在本书后面也会遇见.

设 $\gamma_0=[-l,l]$，$0<l<\frac{a\pi}{2}$，而 $\gamma_0'=L_0-\gamma_0$. 用 γ 和 γ' 分别记与 γ_0 和 γ_0' 合同(mod $a\pi$) 的所有线段的集合. 这里考虑的特殊情况为

$$a(x)+\mathrm{i}b(x)=\begin{cases}a_1+\mathrm{i}b_1, & x\in\gamma,\\ a_2+\mathrm{i}b_2, & x\in\gamma',\end{cases}\tag{1.39}$$

其中 a_j,b_j 为实常数，且 $a_j+\mathrm{i}b_j\neq 0$ $(j=1,2)$，$a_1+\mathrm{i}b_1\neq a_2+\mathrm{i}b_2$.

定义单值实函数 $\omega(x)$ $(-\pi<\omega(x)<\pi)$：

$$\cos\omega(x)=\frac{a(x)}{\sqrt{a(x)^2+b(x)^2}},\quad \sin\omega(x)=\frac{b(x)}{\sqrt{a(x)^2+b(x)^2}},\tag{1.40}$$

并写：当 $x\in\gamma$ 时 $\omega(x)=\omega_1$；当 $x\in\gamma'$ 时 $\omega(x)=\omega_2$. 于是 $\omega_1\neq\omega_2$，且

$$-\frac{a(x)+\mathrm{i}b(x)}{a(x)-\mathrm{i}b(x)}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(x)+\mathrm{i}\pi}.\tag{$*$}$$

令

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(2\mathrm{i}\omega(t)+\mathrm{i}\pi)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a\pi}\int_{L_0}\left(\omega(t)+\frac{\pi}{2}\right)\cot\frac{t-z}{a},\quad \mathrm{Im}\,z\neq 0.\end{aligned}\tag{1.41}$$

显然

$$\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(z),\tag{1.42}$$

且由推广的 Plemelj 公式，

$$\Gamma^+(x)-\Gamma^-(x)=2\mathrm{i}\omega(x)+\mathrm{i}\pi\quad(x\text{ 为实数}),$$

于是

$$\frac{\mathrm{e}^{\Gamma^+(x)}}{\mathrm{e}^{\Gamma^-(x)}}=-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(x)}=-\frac{a(x)+\mathrm{i}b(x)}{a(x)-\mathrm{i}b(x)}.\tag{1.43}$$

我们可以简化 $\Gamma(z)$ 为有限形式. 注意

$$\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=\pm1,\quad z\in S^{\pm}.\tag{1.44}$$

此可由 S^+ 或 S^- 中 $|\mathrm{Re}\,z|<\frac{1}{2}$ 的无限半子带形域上的留数定理(或 Cauchy 定理) 以及当 $z\to\pm\infty\mathrm{i}$ 时 $\cot\frac{t-z}{a}\to\pm\mathrm{i}$ 来证明. 于是，(1.41) 实际上是

$$\Gamma(z)=\frac{1}{a\pi}\left(\omega_1\int_{\gamma_0}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+\omega_2\int_{\gamma_0'}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t\right)\pm\frac{\mathrm{i}\pi}{2},\quad z\in S^{\pm}.\tag{1.41$'$}$$

为了求出(1.41)$'$ 中出现的沿 γ_0 的积分，将 z 平面沿 γ 剖开. 因此，

$$\frac{1}{a}\int_{\gamma_0}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=\left[\log\sin\frac{t-z}{a}\right]_{\gamma_0}=\left\{\log\frac{\sin\dfrac{l-z}{a}}{\sin\dfrac{-l-z}{a}}\right\}_1$$

$$=\left\{\log\frac{\tan\dfrac{z}{a}-\tan\dfrac{l}{a}}{\tan\dfrac{z}{a}+\tan\dfrac{l}{a}}\right\}_1$$

$$=\ln\left|\frac{\tan\dfrac{l}{a}-\tan\dfrac{z}{a}}{\tan\dfrac{l}{a}+\tan\dfrac{z}{a}}\right|+\mathrm{i}\theta_1(z),\tag{1.45}$$

其中所含的下标为 1 的对数分支已取定使

$$\theta_1(z)=\left\{\arg\left[\frac{\tan\dfrac{z}{a}-\tan\dfrac{l}{a}}{\tan\dfrac{z}{a}+\tan\dfrac{l}{a}}\right]\right\}_1\in\begin{cases}(0,\pi), & z\in S^+,\\(-\pi,0), & z\in S^-,\end{cases}\tag{1.46}$$

因而 $\theta_1(\bar{z})=-\theta_1(z)$，

$$\theta_1^{\pm}(x)=\begin{cases}\pm\pi, & x\in\gamma,\\0, & x\in\gamma'.\end{cases}\tag{1.47}$$

如果我们令 $\zeta=\tan\dfrac{z}{a}$，则 $\theta_1(z)$ 为图 1.6 中所示的角，其中 $L=\tan\dfrac{l}{a}$. ①

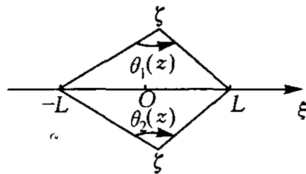


图 1.6

同样，把 z 平面用 γ' 剖开，就有

$$\frac{1}{a}\int_{\gamma_0'}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_l^{a\pi-l}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=\left[\log\frac{t-z}{a}\right]_l^{a\pi-l}$$

$$=\left\{\log\frac{\sin\dfrac{a\pi-l-z}{a}}{\sin\dfrac{l-z}{a}}\right\}_2=\left\{\frac{\tan\dfrac{l}{a}+\tan\dfrac{z}{a}}{\tan\dfrac{l}{a}-\tan\dfrac{z}{a}}\right\}_2$$

$$=\ln\left|\frac{\tan\dfrac{l}{a}+\tan\dfrac{z}{a}}{\tan\dfrac{l}{a}-\tan\dfrac{z}{a}}\right|+\mathrm{i}\theta_2(z),\tag{1.48}$$

---

① 当 $l\to\dfrac{a\pi}{2}$ 时，有 $L\to+\infty$，又对 $z\in S^{\pm}$ 分别有 $\theta_1(z)\to\pm\pi$；所以可得(1.44)的另一证明.

其中

$$\theta_2(z)=\left\{\arg\left[\frac{\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}}{\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}}\right]\right\}_2\in\begin{cases}(0,\pi), & z\in S^+,\\(-\pi,0), & z\in S^-,\end{cases}\tag{1.49}$$

所以 $\theta_2(\bar{z})=-\theta_2(z)$,

$$\theta_2^{\pm}(x)=\begin{cases}0, & x\in\gamma,\\ \pm\pi, & x\in\gamma'.\end{cases}\tag{1.50}$$

立即可以验证

$$\theta_1(z)=\begin{cases}\pi-\theta_2(z), & z\in S^+,\\ -\pi-\theta_2(z), & z\in S^-.\end{cases}\tag{1.51}$$

于是,

$$\left\{\log\frac{\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{l}{a}}{\tan\frac{z}{a}+\tan\frac{l}{a}}\right\}_1=\pm\pi i-\left\{\log\frac{\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}}{\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}}\right\}_2,\quad z\in S^{\pm}.$$

将(1.44)与(1.47)代入(1.41),应用上面的等式,便得

$$\Gamma(z)=\pm\frac{\pi i}{2}\pm\omega_1 i+\frac{\omega_2-\omega_1}{\pi}\left\{\log\frac{\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}}{\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}}\right\}_2,$$

因而

$$e^{\Gamma(z)}=\pm i e^{\pm\omega_1 i}\left[\frac{\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}}{\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}}\right]^{\nu},\quad z\in S^{\pm},\tag{1.52}$$

这里已令

$$\nu=\frac{\omega_2-\omega_1}{\pi},\quad 0<|\nu|<2,\tag{1.53}$$

以及

$$\left[\frac{\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}}{\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}}\right]^{\nu}=\exp\left\{\nu\left\{\log\frac{\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}}{\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}}\right\}_2\right\},\tag{1.54}$$

它在用 γ' 剖开的 z 平面中全纯且以 $a\pi$ 为周期.

用 $e^{\Gamma(z)}$ 的这一表达式易于直接验证:(1.42)与(1.43)确实满足. 但它不能作为(1.37)的典则函数,因为它有一因子在 γ 的诸端点处有零点或"极

点”. 为要建立典则函数 $X(z)$，可以如下对 $e^{\Gamma(z)}$ 乘上一因子以消除它们.

在 $0<\nu<1$ 的情况，我们令

$$X(z)=\frac{e^{\Gamma(z)}}{\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}}=\frac{\pm ie^{\pm\omega_1 i}}{\left(\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)^{\nu}\left(\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}\right)^{1-\nu}},\quad z\in S^{\pm},\tag{1.55}$$

其中右端分母中的函数在以 γ' 剖开的 z 平面中全纯，且当 $z=x\in\gamma$ 时其两因子均取正值. 这时 $X(z)$ 在 $z=\pm\frac{a\pi}{2}$ 处有 1 阶零点. 所以，相应于(1.37) 的齐次问题的一般解为

$$\Omega_0(z)=X(z)\left(C_1\tan\frac{z}{a}+C_2\right),\tag{1.56}$$

其中 C_1,C_2 必须取为实数.

在 $1<\nu<2$ 的情况，我们令

$$X(z)=e^{\Gamma(z)}\frac{\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}}{\left(\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}\right)^{2}}=\frac{\pm ie^{\pm\omega_1 i}}{\left(\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}\right)^{2-\nu}\left(\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)^{\nu-1}}.\tag{1.57}$$

依此同样推理，仍得该齐次问题的一般解(1.55)，C_1 和 C_2 仍为实数，但 $X(z)$ 要用(1.37) 给出.

对于 $\nu=1$ 的情况，显然 $-\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$ 实际上在整个 x 轴上为一常数，而相应的问题(1.37) 具有常数系数. 这是一个简单情况.

当 $-2<\nu<0$ 时，可作类似的讨论.

众所周知，(1.37) 的一个特解是

$$\Omega_1(z)=\frac{X(z)}{a\pi i}\int_{L_0}\frac{F(t)}{X^{+}(t)(a(t)-ib(t))}\cot\frac{t-z}{a}\,dt,\quad \operatorname{Im}z\neq 0.\tag{1.58}$$

我们将证明 $\Omega_1(z)$ 满足(1.36). 实际上，我们有

$$\overline{\Omega}_1(z)=-\frac{\overline{X}(z)}{a\pi i}\int_{L_0}\frac{F(t)}{\overline{X^{+}(t)}(a(t)+ib(t))}\cot\frac{t-z}{a}\,dt,\quad \operatorname{Im}z\neq 0.$$

已经知道 $\overline{X}(z)=X(z)$ 以及

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega(t)} = -\frac{a(t)+\mathrm{i}b(t)}{a(t)-\mathrm{i}b(t)},$$

故

$$\overline{X^+(t)} = -\frac{a(t)-\mathrm{i}b(t)}{a(t)+\mathrm{i}b(t)}\overline{X^-(t)} = -\frac{a(t)-\mathrm{i}b(t)}{a(t)+\mathrm{i}b(t)}\overline{X}^+(t),$$

或即

$$\overline{X^+(t)}(a(t)+\mathrm{i}b(t)) = -X^+(t)(a(t)-\mathrm{i}b(t)).$$

将它代入上一等式，立得 $\overline{\Omega}_1(z) = \Omega_1(z)$.

这样，问题(1.31)的解 $W(z) = u - \mathrm{i}v$ 为

$$W(z) = \Omega(z) = \Omega_1(z) + \Omega_0(z), \quad z \in S^-, \tag{1.59}$$

其中 $\Omega_1(z)$ 与 $\Omega_0(z)$ 分别由(1.58)与(1.56)给出.

1.4 关于半平面的 Hilbert 核积分公式

由于以后的需要，我们建立下一定理.

定理 设 $g(z)$ 在下半平面 S^- 中全纯，以 $a\pi$ 为周期，能连续延拓到 L_0：$\left(-\frac{a\pi}{2}, \frac{a\pi}{2}\right)$（及其周期合同线段）上，且 $g(-\infty\mathrm{i})$ 有界，则有下列公式成立：

$$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t = -g(z) + \frac{1}{2}g(-\infty\mathrm{i}), \quad z \in S^-; \tag{1.60}$$

$$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} \overline{g(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\overline{g(-\infty\mathrm{i})}, \quad z \in S^-. \tag{1.61}$$

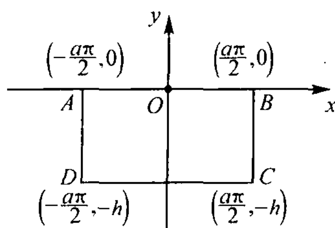


图 1.7

证 将 $g(t)\cot\frac{t-z}{a}$ 沿封闭线路 Γ：$ABCD$（按顺时针方向）积分，其中 A,B,C,D 分别为 $\left(-\frac{a\pi}{2},0\right)$，$\left(\frac{a\pi}{2},0\right)$，$\left(\frac{a\pi}{2},-h\right)$，$\left(-\frac{a\pi}{2},-h\right)$，且已取 $h>0$ 充分大使 z 位于矩形内部(图 1.7).

根据假设，由留数定理，有

$$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t = -g(z), \tag{1.62}$$

而(1.62)式左边的积分可分为4个积分：

$$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\left\{\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right\}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t.$$

注意到 $g(t)\cot\frac{t-z}{a}$ 的周期性，因而，它在 BC 上与 AD 上的值是相同的，这样，有

$$\left\{\int_{BC}+\int_{DA}\right\}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=0.$$

又当 $h\to\infty$ 时，沿 CD 的积分趋于 $a\pi\mathrm{i}g(-\infty\mathrm{i})$，因此，证得(1.60)式.

类似地，可证(1.61)式.

第二章

各向同性平面弹性理论的周期问题

关于各向同性平面弹性理论的周期问题，曾有过不少工作，如 R. C. J. Howland，Г. Н. Сабин，唐立民，M. Isida 等对周期孔附近应力分析的研究，G. M. L. Gladwell 对周期接触问题的研究，森口繁一对当应力按周期变化时应力函数表达式的探讨等. 所有这些工作都有一定的局限性，或者孔形比较特殊，或者边值条件比较特殊，而且讨论不够完善. 特别地都对位移的可能情况很少讨论.

本章首先对带有按周期分布且任意形状的孔的无限各向同性弹性平面的应力函数一般表达式进行讨论，从而推出：若应力是周期且有界的，则位移是准周期的，即每经过一周期，位移要增加一常数. 这样可以得到第一基本问题的一般提法；同时，还证明其逆也成立，又可以得到第二基本问题的一般提法，这是 2.1 节的内容. 但是，为了讨论的方便，本章从 2.2 节开始，除了假定应力是周期与有界的外，总是假定位移也是周期的. 这种讨论往往是能满足实际工程要求的；而对准周期位移情况，讨论不会出现困难. 此外，还讨论了各向同性平面弹性的周期焊接问题. 2.3 节讨论各向同性平面弹性的周期基本问题. 2.4 节讨论各向同性平面弹性理论的周期接触问题.

2.1 各向同性平面弹性理论周期问题中的应力函数

2.1.1 应力函数的一般表达式

这里，对带有按周期分布且任意形状的孔的无限各向同性弹性平面的应力函数一般表达式进行讨论.

设弹性平面中有一列以 $a\pi$ 为周期的孔，其边界为 L_j，$j=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，并且，每一 L_j 中含有 n 条逐段光滑封闭曲线 $l_k^{(j)}$，$k=1,2,\cdots,n$（图

2.1)；而对同一 k，$l_k^{(j)}(j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 周期地排列着. 将 $l_k^{(0)}$ 简记为 l_k. 取所有曲线的反时针向为正向，把弹性体所占区域记作 S^-，把 $l_k^{(j)}$ 所围区域记作 $S_k^{(j)+}$. $S_k^{(0)+}$ 则简记为 S_k^+，并记 $S_0^+=\sum_{k=1}^{n}S_k^+$. 带形区域 $|x|<\frac{1}{2}a\pi$ 记作 S_0，并记 $S_0^-=S_0-S_0^+$.

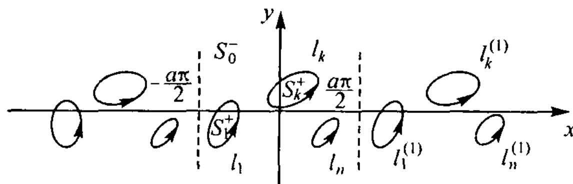


图 2.1

记 S^- 中任何点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处的应力状态为 $\sigma_x(z),\sigma_y(z),\tau_{xy}(z)$，复位移为 $D(z)=u+\mathrm{i}v$. 大家知道，它们可由应力函数 $\varphi(z),\psi(z)$ 或它们的导数 $\Phi(z)=\varphi'(z)$，$\Psi(z)=\psi'(z)$ 表示为①

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left(\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right),\tag{2.1}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=2\left(\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\right),\tag{2.2}$$

$$2\mu D=2\mu(u+\mathrm{i}v)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)},\tag{2.3}$$

其中 μ 为弹性体的剪切弹性模数，κ 为与泊松比 σ 有关的一个常数($1<\kappa<3$)；而 $\varphi(z),\psi(z)$ 为 S^- 中(一般是多值的)解析函数，并且 $\Phi(z),\Psi(z)$ 在 S^- 中全纯.

这里假定：应力是以 $a\pi$ 为周期的，且在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处保持有界.

根据这个假定，只需指出 L_0 上的外应力就足以说明所有孔边上的应力. 把 l_k 上的外应力主矢量记作 $X_k+\mathrm{i}Y_k$，这时 L_0 上的外应力主矢量就是

$$X+\mathrm{i}Y=\sum_{k=1}^{n}(X_k+\mathrm{i}Y_k).\tag{2.4}$$

把 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处的应力记为

$$\sigma_\pm=\sigma_y(\pm\infty\mathrm{i}),\quad \tau_\pm=\tau_{xy}(\pm\infty\mathrm{i}),\quad h_\pm=\sigma_x(\pm\infty\mathrm{i}).\tag{2.5}$$

由应力周期性条件，考虑周期带 S_0^- 上的平衡，立刻可知

$$\sigma_- -\sigma_+=\frac{Y}{a\pi},\quad \tau_- -\tau_+=\frac{X}{a\pi}.\tag{2.6}$$

① 本书将 $\varphi(z),\psi(z)$，或 $\Phi(z),\Psi(z)$ 都称为应力函数.

此外，须注意到：因为应力在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处有界，由式(2.1)可知，$\mathrm{Re}\Phi(z)$ 在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处有界. 设 $\zeta=\tan\dfrac{z}{a}$ 时，$\Phi(z)$ 变成 $\Phi_*(\zeta)$，于是 $\mathrm{Re}\Phi_*(\zeta)$ 在 $\zeta=\pm\mathrm{i}$ 处有界，由此可见 $\zeta=\pm\mathrm{i}$ 是 $\Phi_*(\zeta)$ 的正则点，从而 $\Phi(z)$ 在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处有界，即 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有限.

又因

$$\Phi'(z)=\Phi'_*(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}=\frac{\Phi'_*(\zeta)}{a\cos^2\dfrac{z}{a}},$$

所以

$$\lim_{z\to\pm\infty\mathrm{i}} z\Phi'(z)=0. \tag{2.7}$$

由式(2.2)可知，$\Psi(\pm\infty\mathrm{i})$ 也是有界的.

为求 $\varphi(z),\psi(z)$ 的一般表达式，使它们的多值部分和非周期部分都分离出来.

在每一 $S_k^+(1\leqslant k\leqslant n)$ 内任取一点 z_k. 大家知道，当 z 反时针向绕过洞 $S_k^{(j)+}$ 一周时 $\varphi(z)$ 的多值性部分改变量为

$$-\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\log(z-z_k-ja\pi).$$

为了分离出 $\varphi(z)$ 的整个多值部分，这里不能直接把上式对 k,j 求和，因为这样会得到发散级数. 由于把上式中的对数因子改为

$$\log\left(1-\frac{z-z_k}{ja\pi}\right)\quad(j\neq 0)$$

时并不改变多值特征，于是，利用 $\sin\dfrac{z-z_k}{a}$ 的无穷乘积表示式，立刻知道，

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\log\sin\frac{z-z_k}{a}+\varphi^*(z), \tag{2.8}$$

其中 $\varphi^*(z)$ 已是 S^- 内的全纯函数.

同理可得

$$\psi(z)=\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathrm{i}Y_k)\log\sin\frac{z-z_k}{a}+\psi^*(z), \tag{2.9}$$

其中 $\psi^*(z)$ 也在 S^- 内全纯. 从而

$$\Phi(z)=-\frac{1}{2a\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\cot\frac{z-z_k}{a}+\Phi^*(z), \tag{2.10}$$

$$\Psi(z)=\frac{\kappa}{2a\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathrm{i}Y_k)\cot\frac{z-z_k}{a}+\Psi^*(z), \tag{2.11}$$

这里已令 $\Phi^*(z)=\varphi^{*\prime}(z)$，$\Psi^*(z)=\psi^{*\prime}(z)$.

应用 Михлин ([1]，§55) 的结果，由应力的周期性，可以推出下列关系：

$$\Phi(z+a\pi)=\Phi(z)+\mathrm{i}\alpha,$$
$$\Psi(z+a\pi)=\Psi(z)-a\pi\Phi'(z),$$

其中 α 为某实常数，但由于 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有限，可知 $\alpha=0$. 因此相应地便有

$$\Phi^*(z+a\pi)=\Phi^*(z),$$
$$\begin{aligned}\Psi^*(z+a\pi)&=\Psi^*(z)-a\pi\Phi'(z)\\&=\Psi^*(z)-\frac{1}{2a(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k+\mathrm{i}Y_k}{\sin^2\dfrac{z-z_k}{a}}-a\pi\Phi^{*\prime}(z).\end{aligned}$$

把上两式积分，并注意到 φ^*，ψ^* 都是单值的，因而可以得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi^*(z+a\pi)&=\varphi^*(z)+a\pi\beta,\\\psi^*(z+a\pi)&=\psi^*(z)-a\pi\varphi'(z)+\gamma\\&=\psi^*(z)+\frac{1}{2(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\cot\frac{z-z_k}{a}\\&\quad-a\pi\Phi^*(z)+\gamma,\end{aligned}\right\}\tag{2.12}$$

其中 β,γ 为某二复常数.

把式(2.3)中的 z 改为 $z+a\pi$，再与式(2.3)相减，以式(2.9)，(2.10)代入，并利用式(2.12)，可得

$$2\mu(D(z+a\pi)-D(z))=a\pi\kappa\beta-\overline{\gamma}.$$

如果不计及弹性体的刚性旋转，则还可认为上式右边为一实数. 这样，我们得到下列定理：

定理 2.1　*在带有按周期 $a\pi$ $(a>0)$ 分布且任意形状的孔的无限各向同性弹性平面中，如果应力已知是周期的，并且设其在无穷远处有界，则其相应位移必定是***准周期***的，即*

$$\left.\begin{aligned}2\mu(u(z+a\pi)-u(z))&=a\pi q,\\v(z+a\pi)-v(z)&=0,\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

其中 q 为某实常数.

$\dfrac{a\pi q}{2\mu}$ 称为准周期函数 $u(z)$ 的加数.

由前式可知

$$\gamma=a\pi(\kappa\overline{\beta}-q).\tag{2.14}$$

这样，式(2.12) 成为

$$\varphi^*(z+a\pi) = \varphi^*(z) + a\pi\beta,$$
$$\psi^*(z+a\pi) = \psi^*(z) - a\pi\varphi'(z) + a\pi(\kappa\bar{\beta} - q).$$

再令

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(z) &= \varphi^*(z) - \beta z,\\ \psi_0(z) &= \psi^*(z) + z\varphi'(z) - (\kappa\bar{\beta} - q)z,\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

易见它们已是以 $a\pi$ 为周期的在 S^- 中全纯的函数. 下面将看到，β 与 q 可由 $z = \pm\infty\mathrm{i}$ 处的应力确定.

由式(2.10),(2.11),

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2a\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k + \mathrm{i}Y_k)\cot\frac{z-z_k}{a} + \varphi_0'(z) + \beta, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\Psi(z) = &\frac{\kappa}{2a\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{i}Y_k)\cot\frac{z-z_k}{a} + \psi_0'(z)\\ &+\frac{1}{2a\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k + \mathrm{i}Y_k)\left[\cot\frac{z-z_k}{a} - \frac{z}{a\sin^2\frac{z-z_k}{a}}\right]\\ &-\varphi_0'(z) - z\varphi_0''(z) - (\beta - \kappa\bar{\beta} + q).\end{aligned} \tag{2.17}$$

由于 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$, $\Psi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有限，所以 $\varphi_0'(z) = \Phi_0(z)$，$\psi_0'(z) = \Psi_0(z)$ 也有界，再由式(2.8)，便知道

$$\lim_{z\to\pm\infty\mathrm{i}} z\Phi_0'(z) = 0. \tag{2.18}$$

此外，注意到 $\varphi_0(z)$ 为周期函数，因此，

$$0 = \frac{1}{a\pi}(\varphi_0(z+a\pi) - \varphi_0(z)) = \frac{1}{a\pi}\int_z^{z+a\pi}\Phi_0(z)\mathrm{d}z = \Phi_0(\pm\infty\mathrm{i}),$$

其中最后的等式是这样得到的：把积分路径取成从 z 到 $z+a\pi$ 的直线段(当 $|z|$ 充分大时它全在 S^- 内)，把 $\Phi_0(z)$ 的实部与虚部分开，分别应用积分中值定理，然后，令 $z\to\pm\infty\mathrm{i}$ 即得. 同理，$\Psi_0(\pm\infty\mathrm{i}) = 0$. 由此易知 $\varphi_0(\pm\infty\mathrm{i})$，$\psi_0(\pm\infty\mathrm{i})$ 有限.

在式(2.1),(2.2) 中消去 σ_x，并令 $z\to\pm\infty\mathrm{i}$，由以上说明以及式(2.16),(2.17)，便得

$$\sigma_\pm + \mathrm{i}\tau_\pm = \mp\frac{Y - \mathrm{i}X}{2a\pi} + (\kappa+1)\bar{\beta} - q.$$

把这两式相减，便再次得到平衡条件(2.6)；把这两式相加，取共轭值，得

$$(\kappa+1)\beta - q = \frac{\sigma_- + \sigma_+}{2} - \mathrm{i}\frac{\tau_- + \tau_+}{2}. \tag{2.19}$$

另一方面，由式(2.16)与(2.17)，有

$$\Phi(\pm\infty\mathrm{i})=\mp\frac{X-\mathrm{i}Y}{2a\pi(\kappa+1)}+\beta.$$

于是，由式(2.1)立刻得到

$$h_{\pm}+\sigma_{\pm}=\mp\frac{2Y}{a\pi(\kappa+1)}+2(\beta+\bar{\beta}). \tag{2.20}$$

由此式可以看出，$h_{\pm}$ 不是任意的，必须满足条件

$$h_{+}+\sigma_{+}+\frac{2Y}{a\pi(\kappa+1)}=h_{-}+\sigma_{-}-\frac{2Y}{a\pi(\kappa+1)},$$

再由式(2.6)可以看出，也就是必须满足条件

$$h_{-}-h_{+}=\frac{3-\kappa}{\kappa+1}\frac{Y}{a\pi}. \tag{2.21}$$

最后，由式(2.19)与(2.20)便容易算出

$$\begin{aligned} q&=\frac{1}{4}[(\kappa+1)h_{+}-(3-\kappa)\sigma_{+}]\\ &=\frac{1}{4}[(\kappa+1)h_{-}-(3-\kappa)\sigma_{-}]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

再把它代回式(2.19)，可以求得

$$\begin{aligned} \beta&=\frac{1}{4}(h_{+}+\sigma_{+})+\frac{Y-\mathrm{i}X}{2a\pi(\kappa+1)}-\frac{\mathrm{i}\tau_{+}}{\kappa+1}\\ &=\frac{1}{4}(h_{-}+\sigma_{-})-\frac{Y-\mathrm{i}X}{2a\pi(\kappa+1)}-\frac{\mathrm{i}\tau_{-}}{\kappa+1}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

这样，β 与 q 都由 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处的应力状况和一个周期带内各孔边外应力合主矢量决定，而与孔边处应力分布状况无关.

把以上结果代回式(2.8)与(2.9)，最后便可得到如下定理：

定理 2.2　*设无限各向同性弹性平面中有一列以 $a\pi$ 为周期的孔，其边界为 L_j，$j=0,\pm1,\pm2,\cdots$，并且每一 L_j 中含有 n 条逐段光滑封闭曲线 $l_k^{(j)}$，$k=1,2,\cdots,n$，而对于同一 k，$l_k^{(j)}$，$j=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 周期地排列着. 假定应力是以 $a\pi$ 为周期的，且在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处保持有界，并设 $l_k^{(0)}$ 上的外应力主矢量为 $X_k+\mathrm{i}Y_k$. 则应力函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别有下列表达式：*

$$\begin{aligned} \varphi(z)=&-\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\log\sin\frac{z-z_k}{a}\\ &+\beta z+\varphi_0(z), \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{i}Y_k)\log\sin\frac{z-z_k}{a}$$
$$+\frac{z}{2a\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\cot\frac{z-z_k}{a}$$
$$+(\kappa\overline{\beta}-\beta+q)z - z\varphi_0'(z)+\psi_0(z), \tag{2.25}$$

其中 q 与 β 分别由式(2.22)与(2.23)给出，而 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 是两个以 $a\pi$ 为周期的在弹性体所占区域 S^- 中全纯的函数.

这样，我们便分离出了 φ 与 ψ 的多值部分与非周期部分. 森口繁一[1] 也给出了周期应力条件下 φ 与 ψ 的一般表达式，但没有分离出多值部分，又由于没有假定应力有界，表达式中一些常数间的联系也就没有了.

推论 2.1 设各向同性无限弹性平面中有一列以 $a\pi$ 为周期的孔如前.. 如果在一周期带内各孔边界上周期外应力的合主矢量为零，而在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处的外应力为 $\sigma=\sigma_y(\pm\infty\mathrm{i})$，$\tau=\tau_{xy}(\pm\infty\mathrm{i})$①，则应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 均单值，且

$$\varphi(z) = \varphi_0(z)+\beta z, \tag{2.26}$$
$$\begin{aligned}\psi(z) &= \psi_0(z) - z\varphi'(z) + \kappa\overline{\beta}z \\ &= (\kappa\overline{\beta}-\beta)z - z\varphi_0'(z)+\psi_0(z),\end{aligned} \tag{2.27}$$

其中

$$\beta = \frac{-\sigma+\mathrm{i}\tau}{1+\kappa}. \tag{2.28}$$

而 $\varphi_0(z)$，$\psi(z)$ 均以 $a\pi$ 为周期.

2.1.2 定理 2.1 的逆定理

定理 2.3 设各向同性平面弹性体的位移已知是准周期的，则应力必定是周期的.

证 现设横向位移是准周期的，而纵向位移是周期的：

$$\left.\begin{aligned}&2\mu(u(z+a\pi)-u(z)) = a\pi q,\\ &v(z+a\pi) = v(z).\end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

由于

---

① 这时，$z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处的外应力必相等，以保证平衡.

$$z\mu(u+\mathrm{i}v)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)},\tag{2.30}$$

因而

$$\kappa(\varphi(z+a\pi)-\varphi(z))-z\overline{(\varphi'(z+a\pi)}-\overline{\varphi'(z)})$$
$$-a\pi\overline{\varphi'(z+a\pi)}-\overline{(\psi(z+a\pi)}-\overline{\psi(z)})=a\pi q,$$

两端取微分，得

$$[\kappa(\Phi(z+a\pi)-\Phi(z))-(\overline{\Phi(z+a\pi)}-\overline{\Phi(z)})]\mathrm{d}z$$
$$-[z(\overline{\Phi'(z+a\pi)}-\overline{\Phi'(z)})+a\pi\overline{\Phi'(z+a\pi)}$$
$$+(\overline{\Psi(z+a\pi)}-\overline{\Psi(z)})]\mathrm{d}\,\overline{z}=0.$$

由于 $\mathrm{d}z$ 可以任意，因而 $\mathrm{d}\,\overline{z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}z$ 中的 θ 也可任意，所以

$$\kappa(\Phi(z+a\pi)-\Phi(z))=\overline{\Phi(z+a\pi)}-\overline{\Phi(z)},\tag{2.31}$$

$$z(\Phi'(z+a\pi)-\Phi'(z))+a\pi\Phi'(z+a\pi)+\Psi(z+a\pi)-\Psi(z)=0.\tag{2.32}$$

在(2.31)式中取共轭值，再代回去，并注意到 $\kappa>1$，因此

$$\Phi(z+a\pi)=\Phi(z).\tag{2.33}$$

将(2.33)式代入(2.32)式，便得

$$\Psi(z+a\pi)-\Psi(z)=-a\pi\Phi'(z).\tag{2.34}$$

(2.33)式与(2.34)式合在一起，就立刻推出应力的周期性.

这个定理在位移为准周期的假定下，给求解第二基本问题提供了可靠的依据.

注　由广义虎克定律：

$$\sigma_x=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\sigma_y=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

其中 λ,μ 为弹性介质的 Lamé 常数，立刻可知：当位移为准周期的时，这些应力应为周期的. 但这里我们更多地得到(2.33)与(2.34).

2.1.3　基本问题的提法

第一基本问题. 已知孔边 L 上的周期应力 $X_n(t)+\mathrm{i}Y_n(t)$ 以及在 $z=-\infty\mathrm{i}$ (或 $z=+\infty\mathrm{i}$) 处的应力状态，求弹性平衡(即求弹性体内的应力分布). 这是在应力为周期并且在无穷远处有界的条件下问题的最一般的提法. 这

时，由式(2.6),(2.21)知，在 $z=+\infty i$（或 $z=-\infty i$）处的应力也是已知的，从而由式(2.22),(2.23)，β 与 q 也是已知的.

这问题可化为下列边值问题：

$$\varphi(t)+\overline{t\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C(t),\quad t\in L,\tag{2.35}$$

其中 $C(t)$ 在各孔边上为待定常数，而

$$f(t)=-\mathrm{i}\int_0^t(X_n+\mathrm{i}Y_n)\mathrm{d}s^{①},\quad t\in L$$

（s 为每一个孔边上的弧长参数）. 把式(2.24)与(2.25)代入式(2.35)，可以得到

$$\varphi_0(t)+(t-\bar{t})\,\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=f_0(t)+C(t),\tag{2.36}$$

其中已令

$$\begin{aligned}f_0(t)=&\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\log\sin\frac{t-z_k}{a}\\&-\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\,\overline{\log\sin\frac{t-z_k}{a}}\\&+\frac{t-\bar{t}}{2a\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathrm{i}Y_k)\,\overline{\cot\frac{t-z_k}{a}}\\&-(\beta+\bar{\beta})t-(\kappa\beta-\bar{\beta}+q)\bar{t}+f(t).\end{aligned}\tag{2.37}$$

这里 $f_0(t)$ 显然已是 L 上的单值函数. 至于 $C(t)$，当 t 在各个 $L_k^{(j)}$ 上时，所取常数不都是独立的，它们间的关系如何要看式(2.37)中各对数所取的分支间的关系而定. 例如，先取定 l_k 上的 $\log\sin\dfrac{t-z_k}{a}$ 的一确定分支，然后认为，当 $t+ja\pi\in l_k^{(j)}$ 时，

$$\log\sin\frac{t+ja\pi-z_k}{a}=\log\sin\frac{t-z_k}{a}+j\pi\mathrm{i},$$

则由式(2.37)易见

$$f_0(t+a\pi)-f_0(t)=-\frac{Y-\mathrm{i}X}{2}-[(\kappa+1)\beta+q]a\pi,$$

于是

$$C(t+a\pi)-C(t)=\frac{Y-\mathrm{i}X}{2}+[(\kappa+1)\beta+q]a\pi=a\pi(\sigma_- -\mathrm{i}\tau_- +2q).$$

总之，式(2.35)中待定常数实际上只有 n 个：相应于每一 $l_k(k=1,2,\cdots,n)$

---

① 见路见可[7]. 此等式右边多了一个负号，这是因为弹性体在 L 正向右侧的缘故.

上有一个．此外，还要注意，在求解(2.36)时，应该要求 $\varphi_0(\pm\infty i)$ 与 $\psi_0(\pm\infty i)$ 有限．

上述边值问题可化为 Fredholm 积分方程来求解．对于一个周期带中只有一孔的情况，Михлин [1] 已经作过讨论；而对于一个周期带中有多个孔的情况，可类似 Мусхелишвили [1] 处理非周期情况的方法进行讨论．

第一基本问题还有另一种提法，即除已知 X_n+iY_n 外，还已知 σ_-,τ_-（或 σ_+,τ_+）以及 q，求弹性平衡．因为由式(2.22)，立刻可算出 $h_\pm$，所以结果还是一样．例如，如果要求位移也是周期的，即 $q=0$，则用不着解边值问题，便可确定 $h_\pm$．

第二基本问题．已知各周期孔边的相对位移以及一个周期带内各孔边的外应力合主矢量 $X+iY$，并且给出在 $z=-\infty i$（或 $z=+\infty i$）处的应力，求弹性平衡．

或者，已知各周期孔边的相对位移及常数 q，以及 $X+iY$，σ_-，τ_-（或 σ_+，τ_+），求弹性平衡．

这里，相对位移是指它们为准周期的，但(2.13)中的 q 并没有给出．如第一基本问题一样，是在位移为准周期的条件下问题的最一般提法．同时，这种问题也可如上面所述同样化为积分方程求解．

为了讨论的方便，此后，除了假定应力是周期与有界的外，总是假定位移也是周期的．

2.1.4　各向同性弹性半平面的应力函数

设各向同性弹性体占有下半平面 S^-，这时可以只用一个应力函数来表达应力和位移分布．

当 z 在上半平面 S^+ 时，令

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\overline{z})},\ \overline{\Psi}(z)=\overline{\Psi(\overline{z})},\quad z\in S^+,\tag{2.38}$$

其中 $\Phi(z)=\varphi'(z)$，$\Psi(z)=\psi'(z)$，$z\in S^-$，为以前定义的应力函数；然后再令

$$\Phi(z)=-\overline{\Phi}(z)-z\overline{\Phi}'(z)-\overline{\Psi}(z),\quad z\in S^+,\tag{2.39}$$

于是，(2.1) ~ (2.3) 便可改写为

$$\sigma_x+\sigma_y=2(\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}),\tag{2.40}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[(\overline{z}-z)\Phi'(z)-\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)],\tag{2.41}$$

或

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)-\Phi(\overline{z})+(z-\overline{z})\overline{\Phi'(z)},\tag{2.42}$$

$$2\mu(u'+\mathrm{i}v')=\kappa\Phi(z)+\Phi(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \tag{2.43}$$

这里

$$u'=\frac{\partial u}{\partial x},\quad v'=\frac{\partial v}{\partial x},$$

因而

$$2\mu(u+\mathrm{i}v)=\kappa\varphi(z)+\varphi(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\varphi'(z)}+\text{const}. \tag{2.44}$$

请注意，不论 z 在 S^- 或 S^+ 中，均已令 $\varphi'(z)=\Phi(z)$. 此外还要注意，在 x 轴上无载荷的部分，$\Phi(z)$ 在 S^- 和 S^+ 中互为解析延拓.

此时，应力函数 $\Phi(z)$ 有如下性质.

定理 2.4 *在各向同性弹性半平面的周期问题中，(2.40) ~ (2.43) 式中的 $\Phi(z)$（包括其边值）必在 S^+ 与 S^- 中以 $a\pi$ 为周期，且在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处有界.*[①]

证 先设 $z\in S^-$. 由(2.40) 易证

$$\Phi'(z+a\pi)=\Phi'(z),\quad z\in S^-.$$

因为 S^- 是单连通的，因而，立即可得

$$\Phi(z+a\pi)=\Phi(z)+C,\quad z\in S^-, \tag{*}$$

其中 C 为常数. 由(2.42) 式，因其左边以 $a\pi$ 为周期，所以

$$\Phi(\bar{z}+a\pi)=\Phi(\bar{z})+C,\quad z\in S^-,$$

亦即(*)式对 $z\in S^+$ 也成立. 再由(2.43) 左边的周期性，立即可知 $C=0$. 因而 $\Phi(z)$ 在全平面中包括 $\Phi^{\pm}(t)$ $(\mathrm{Im}\,t=0)$ 以 $a\pi$ 为周期.

$\Phi(z)$ 在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 附近有界已经知道，故在 $z=+\infty\mathrm{i}$ 附近的有界性随之从(2.43) 立即可得. 定理证毕.

2.2 各向同性弹性平面中的周期焊接问题

在本节中，应用周期 Riemann 边值问题的结果，求解周期焊接问题.

2.2.1 弹性平面和焊接物材料一致的情况

设各向同性弹性平面中有一列周期孔，其边界为 $L_0, L_{\pm1}, \cdots$，以反时针

---

① 在 x 轴上，在载荷不为零的地方 t 处，应理解为

$$\Phi^+(t+a\pi)=\Phi^+(t),\quad \Phi^-(t+a\pi)=\Phi^-(t).$$

向为正向，以 $a\pi$ 为周期(图 1.1). 今在各孔上焊接与弹性体材料相同的垫圈. 设孔边和垫圈周线间的位置差已知：

$$(u^{+}+\mathrm{i}v^{+})-(u^{-}+\mathrm{i}v^{-})=g(t),\quad t\in L,\tag{2.45}$$

其中 $g(t)$ 也以 $a\pi$ 为周期，并设 $g'(t)\in H$. 设在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处外应力 σ,τ 已知. 求弹性体的平衡.

由上节推论 2.1，(2.26) 与(2.27) 中的 $\varphi_0(z),\psi_0(z)$ 以 $a\pi$ 为周期，且有界.

按照上面的假定，将有如下的边值条件：

$$\varphi^{+}(t)+t\overline{\varphi'^{+}(t)}+\overline{\psi^{+}(t)}=\varphi^{-}(t)+t\overline{\varphi'^{-}(t)}+\overline{\psi^{-}(t)},\quad t\in L,\tag{2.46}$$

$$\kappa\varphi^{+}(t)-t\overline{\varphi'^{+}(t)}-\overline{\psi^{+}(t)}=\kappa\varphi'(t)-t\overline{\varphi'^{-}(t)}-\overline{\psi^{-}(t)}+2\mu g(t),\quad t\in L.\tag{2.47}$$

由这些条件，易见问题可化为求解两个最简单的 Riemann 边值问题：

$$\varphi^{+}(t)-\varphi^{-}(t)=\frac{2\mu}{\kappa+1}g(t),$$

$$\psi^{+}(t)-\psi^{-}(t)=\frac{2\mu}{\kappa+1}h(t),$$

其中 $t\in L$，而

$$h(t)=-\overline{g(t)}-\bar{t}g'(t).$$

把 $\varphi(t),\psi(t)$ 分别换作 $\varphi_0(t),\psi_0(t)$，可得

$$\varphi_0^{+}(t)-\varphi_0^{-}(t)=\frac{2\mu}{\kappa+1}g(t),\tag{2.48}$$

$$\psi_0^{+}(t)-\psi_0^{-}(t)=\frac{2\mu}{\kappa+1}h_0(t),\tag{2.49}$$

其中

$$h_0(t)=-\overline{g(t)}+(t-\bar{t})g'(t).\tag{2.50}$$

显然 $h_0(t)$ 已是以 $a\pi$ 为周期的函数，且 $\in H$. 于是，问题化为求解周期 Riemann 边值问题(2.48) 与(2.49)，并要求 $\varphi_0(t),\psi_0(t)$ 在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处有限.

此两问题的指标皆为 $k=0$，因此其一般解为

$$\varphi_0(z)=\frac{\mu}{(\kappa+1)a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t,\tag{2.51}$$

$$\psi_0(z)=\frac{\mu}{(\kappa+1)a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}h_0(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t.\tag{2.52}$$

这里已略去了任意常数项，因为它们只会影响整个系统的刚性平移.

应用(2.26) 与(2.27)，求得 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$，即可得最后所需结果.

注 1 如 L 为一排周期性裂纹，以上所论也同样地成立；但这时要求 $g(t)$ 在 L 的端点处必须为零.

注 2 如讨论的是有一排周期孔的半平面或无限带形，则问题可化为半平面或无限带形中的周期第一基本问题，方法和 Мусхелишвили [1] 的讨论相似. 对于半平面的周期第一基本问题，还可参看下节第一段.

例 2.1 一排圆孔、圆垫圈的特例(材料相同).

设 L_0 是半径为 r 的圆：$|z|=r$，垫圈也是圆形，但半径略大，为 $r+\varepsilon$，$\varepsilon>0$. 并设在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处无外应力. 于是

$$\left.\begin{aligned} g(t) &= -\varepsilon e^{\mathrm{i}\theta} = -\frac{\varepsilon t}{r}, \\ h_0(t) &= \frac{\varepsilon \bar{t}}{r} - (t-\bar{t})\frac{\varepsilon}{r} = \frac{2\varepsilon r}{t} - \frac{\varepsilon t}{r}, \end{aligned}\right\} \quad t = re^{\mathrm{i}\theta} \in L_0.$$

现在 $\sigma=\tau=0$，由(2.51),(2.52)，可得

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= -\frac{\mu\varepsilon}{(\kappa+1)a\pi r\mathrm{i}}\int_{L_0} t\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} -\dfrac{2\mu\varepsilon z}{(\kappa+1)r}, & z\in S_0^+, \\ 0, & z\in S^-; \end{cases} \\ \psi_0(z) &= \frac{\mu\varepsilon}{(\kappa+1)a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\left(\frac{2r}{t}-\frac{t}{r}\right)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} \dfrac{2\mu\varepsilon}{\kappa+1}\left(\dfrac{2r}{z}-\dfrac{z}{r}-\dfrac{2r}{a}\cot\dfrac{z}{a}\right), & z\in S_0^+, \\ -\dfrac{4\mu\varepsilon r}{(\kappa+1)a}\cot\dfrac{z}{a}, & z\in S^-. \end{cases} \end{aligned}$$

这样，可以求得 $\varphi(z),\psi(z)$ 的表达式分别为

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\dfrac{2\mu\varepsilon}{\kappa+1}\dfrac{z}{r}, & z\in S_0^+, \\ 0, & z\in S_0^-; \end{cases}$$

$$\psi(z) = \begin{cases} \dfrac{4\mu\varepsilon r}{\kappa+1}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{a}\cot\dfrac{z}{a}\right), & z\in S_0^+, \\ -\dfrac{4\mu\varepsilon r}{(\kappa+1)a}\cot\dfrac{z}{a}, & z\in S^-. \end{cases}$$

对于 $z\in S_j^+$ $(j=\pm1,2,\cdots)$ 时，只要作周期延拓.

令 $a\to+\infty$ 时，便可得出无限平面一个圆孔的焊接公式：

$$\varphi(z)=\begin{cases}-\dfrac{2\mu\varepsilon}{\kappa+1}\dfrac{z}{r}, & z\in S^{+},\\ 0, & z\in S^{-};\end{cases}$$

$$\psi(z)=\begin{cases}0, & z\in S^{+},\\ -\dfrac{4\mu\varepsilon r}{(\kappa+1)z}, & z\in S^{-}.\end{cases}$$

这和 Мусхелишвили [1] 中的结果是一致的.

2.2.2　弹性平面和焊接物剪切模数相同的情况

设弹性平面和垫圈的材料不一样，但剪切模数 μ 相同，只是杨氏模数或泊松比不同. 这时问题仍可化为稍不简单的周期 Riemann 边值问题而解决.

设对于垫圈 S^+ 而言，$\kappa=\kappa^+$，而对于带周期孔的平面 S^-，$\kappa=\kappa^-$. 在 L 上应力平衡条件(2.46) 与 L 上的周期位移差仍如前. 这时，焊接连续性条件(2.47) 成为

$$\begin{aligned}&\kappa^+\varphi^+(t)-t\overline{\varphi'^+(t)}-\overline{\psi^+(t)}\\&=\kappa^-\varphi^-(t)-t\overline{\varphi'^-(t)}-\overline{\psi^-(t)}+2\mu g(t),\quad t\in L.\end{aligned}\tag{2.53}$$

将(2.46) 和(2.53) 相加，便得 $\varphi(z)$ 所应满足的 Riemann 周期边值

$$\varphi^+(t)=\frac{\kappa^-+1}{\kappa^++1}\varphi^-(t)+\frac{2\mu}{\kappa^++1}g(t).\tag{2.54}$$

对于 $\psi(z)$ 所应满足的条件，只要在(2.46) 中取共轭值，并将(2.54) 的结果代入，便可得出

$$\psi^+(t)-\psi^-(t)=-\left[\overline{\varphi^+(t)-\varphi^-(t)}+\bar{t}(\varphi'^+(t)-\varphi'^-(t))\right].\tag{2.55}$$

现在再把 $\varphi(z),\psi(z)$ 改为周期函数 $\varphi_0(z),\psi_0(t)$ 如下.

这时，(2.26) 与(2.27) 仍成立，但对于 S^+ 和 S^- 中的 z，公式中的 β 也有分别不同的值(见(2.28))：

$$\beta^+=\frac{-\sigma+\mathrm{i}\tau}{1+\kappa^+},\quad \beta^-=\frac{-\sigma+\mathrm{i}\tau}{1+\kappa^-},\tag{2.56}$$

这里 σ,τ 仍是 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处的外应力. 由此易见

$$\beta^+(1+\kappa^+)=\beta^-(1+\kappa^-)=-\sigma+\mathrm{i}\tau.\tag{2.57}$$

现在代替(2.26) 与(2.27)，在 S^+,S^- 中分别有

$$\left.\begin{aligned}\varphi^+(z)&=\varphi_0^+(z)+\beta^+z,\\ \varphi^-(z)&=\varphi_0^-(z)+\beta^-z;\end{aligned}\right\}\tag{2.58}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi^+(z)&=\psi_0^+(z)-z\varphi'^+(z)+\kappa^+\bar{\beta}^+z,\\ \psi^-(z)&=\psi_0^-(z)-z\varphi'^-(z)+\kappa^-\bar{\beta}^-z.\end{aligned}\right\}\tag{2.59}$$

边值条件(2.54)现在成为对于 $\varphi_0(z)$ 的边值条件

$$\varphi_0^+(t)=\frac{\kappa^-+1}{\kappa^++1}\varphi_0^-(t)+\frac{2\mu}{\kappa^++1}g(t). \tag{2.60}$$

对于边值条件(2.55)，现在化为 $\psi_0(z)$ 的边值条件

$$\begin{aligned}\psi_0^+(t)-\psi_0^-(t)&=-(\overline{\varphi_0^+(t)}-\overline{\varphi_0^-(t)})+(t-\bar{t})(\varphi_0'^+(t)-\varphi_0'^-(t))\\&\quad+2(t-\bar{t})\mathrm{Re}\{\beta^+-\beta^-\}\\&=-(\overline{\varphi_0^+(t)}-\overline{\varphi_0^-(t)})+(t-\bar{t})\\&\quad\cdot\left[\varphi_0'^+(t)-\varphi_0'^-(t)+\frac{(\kappa^+-\kappa^-)\sigma}{(1+\kappa^+)(1+\kappa^-)}\right].\end{aligned} \tag{2.61}$$

由(2.60)，立即可写出(不计刚性位移)

$$\varphi_0(z)=\begin{cases}\varphi_0^+(z)=\dfrac{\mu}{(\kappa^++1)a\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t, & z\in S^+,\\ \varphi_0^-(z)=\dfrac{\mu}{(\kappa^-+1)a\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t, & z\in S^-.\end{cases} \tag{2.62}$$

由此算出 $\varphi_0^+(z)$,$\varphi_0^-(z)$ 代入(2.61)，便可求得 $\psi_0(z)$. 因此问题便完全解决.

如果 $g(t)$ 满足条件

$$\int_{L_0}g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t=0,\quad z\in S^-, \tag{2.63}$$

则 $\varphi_0^-(z)\equiv 0$，而 $\varphi_0^+(z)$ 仍以(2.62)的前一式给出，且由(2.60)，

$$\varphi_0^+(t)\equiv\frac{2\mu}{\kappa^++1}g(t).$$

以此代入(2.61)，并设 $\sigma=\tau=0$，则

$$\begin{aligned}\psi_0^+(t)-\psi_0^-(t)&=\frac{2\mu}{\kappa^++1}[-\overline{g(t)}+(t-\bar{t})g'(t)]\\&=\frac{2\mu}{\kappa^++1}h_0(t),\end{aligned} \tag{2.64}$$

结果与(2.49)相同，只是其中 κ 改为了 κ^+. 且因这时 $\beta^+=\beta^-=0$，所以(2.58)与(2.59)也和(2.26)与(2.27)当 $\beta=0$ 时相同，即 $\varphi(z)$,$\psi(z)$ 也与前相同.

同理，如 $\sigma=\tau=0$，且对 $z\in S^+$，$g(t)$ 满足条件(2.63)，则也可得类似结果，但 κ 换作了 κ^-. 于是我们得到

定理 2.5 *设各向同性弹性平面和焊接垫圈有相同剪切模数 μ，但有不同的 κ，并设在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处外应力为 0. 如孔边与垫圈间的位移差为 $g(t)$. 对*

于 $z \in S^-$（或 S^+），满足条件(2.63)，则在 S^+ 与 S^- 中应力状态的分布和弹性平面和垫圈的 κ 均为 κ^+（或 κ^-）时的情况相同.

注　2.1 节中注 1 和注 2 这时也适用.

例 2.2　同例 2.1，但 κ^+ 和 κ^- 不同. 现在 $\sigma = \tau = 0$，又因 $g(t) = -\dfrac{\varepsilon t}{r}$，而

$$\int_{L_0} t \cot \frac{t-z}{a}\, \mathrm{d}t = 0, \quad z \in S^-,$$

因而由定理 2.5，立即知道例 2.1 的结果仍是对的，只要把 κ 理解为垫圈的 κ^+，即

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\dfrac{2\mu\varepsilon z}{(\kappa^+ + 1)r}, & z \in S_0^+, \\ 0, & z \in S^-, \end{cases}$$

$$\psi(z) = \begin{cases} \dfrac{4\mu\varepsilon r}{(\kappa^+ + 1)z}\left(1 - \cot\dfrac{z}{a}\right), & z \in S_0^+, \\ -\dfrac{4\mu\varepsilon r}{(\kappa^+ + 1)a}\cot\dfrac{z}{a}, & z \in S^-. \end{cases}$$

2.3　各向同性弹性半平面的周期基本问题

2.3.1　第一基本问题

设各向同性弹性体占有 z 平面的下半平面 S^-. 在 x 轴上，记 $z = t$（t 为实数）. 设已知在 x 轴上的外应力分布

$$\sigma_y(t) = -P(t), \quad \tau_{xy}(t) = T(t), \tag{2.65}$$

它们分段地 $\in H$，且以 $a\pi$ 为周期. 这里把 σ_y 写成 $-P$，意指 P 为压力分布. 我们仍设应力、位移均以 $a\pi$ 为周期，且应力在 $z = -\infty\mathrm{i}$ 处有界. 求整个弹性体的应力（及位移）分布，称为周期第一基本问题. 下面证明

定理 2.6　在上述条件下，周期第一基本问题的解存在且唯一.

证　由(2.42)式，本问题是要求解周期 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = P(t) + \mathrm{i}T(t), \quad t \in L\ (x\ 轴), \tag{2.66}$$

且要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界.

因为此时指标 $k = 0$，可以得到

$$\Phi(z) = \frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} (P(t) + \mathrm{i}T(t)) \cot\frac{t-z}{a}\, \mathrm{d}t + C, \tag{$*$}$$

其中 C 为某一常数，L_0 指线段 $-\frac{1}{2}a\pi \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}a\pi$.

为要确定 C，只要利用位移的周期性假定. 为此，对(*) 式积分，如不计及弹性体刚性平移，有

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}(P(t)+iT(t))\log\sin\frac{t-z}{a}\,dt + Cz,$$

其中对数作为 t 的函数已在 L_0 上任意取定一支.

注意，当 z 例如沿水平方向增加 $a\pi$ 时，$Z=\frac{t-z}{a}$ 就减少 π，而 $w=\sin Z$ 就从 w 变为 $-w$，且当 z 在下(上) 半平面时，$\arg w$ 增加(减少) π. 因此，当 $z\in S^-$ 时

$$\begin{aligned}\varphi(z+a\pi) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}(P(t)+iT(t))\left(\log\sin\frac{t-z}{a}+i\pi\right)dt + C(z+a\pi)\\ &= \varphi(z) - \frac{1}{2}\int_{L_0}(P+iT)dt + Ca\pi,\\ \varphi(\bar{z}+a\pi) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}(P(t)+iT(t))\left(\log\sin\frac{t-\bar{z}}{a}-i\pi\right)dt + C(\bar{z}+a\pi)\\ &= \varphi(\bar{z}) + \frac{1}{2}\int_{L_0}(P+iT)dt + Ca\pi.\end{aligned}$$

因之，由(2.44)，为了位移的周期性，必须

$$\begin{aligned}&\kappa(\varphi(z+a\pi)-\varphi(z)) + (\varphi(\bar{z}+a\pi)-\varphi(\bar{z}))\\ &= -\frac{1}{2}(\kappa-1)\int_{L_0}(P(t)+iT(t))dt + (\kappa+1)Ca\pi\\ &= 0,\end{aligned}$$

从而

$$C = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}(P+iT)dt = \frac{1}{2}\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(P^* + iT^*), \qquad (2.67)$$

其中已令

$$P^* = \frac{1}{a\pi}\int_{L_0}P(t)dt, \quad T^* = \frac{1}{a\pi}\int_{L_0}T(t)dt, \qquad (2.68)$$

所以，把 C 的值代入(*) 式，便得问题的唯一解答：

$$\Phi(z) = \frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0}(P(t)+iT(t))\cot\frac{t-z}{a}\,dt + \frac{1}{2}\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(P^* + iT^*). \qquad (2.69)$$

定理证毕.

如果不计弹性体刚性旋转，则 $\Phi(z)$ 表达式中的虚常数项还可略去，而有

$$\Phi(z) = \frac{1}{2a\pi i}\int_{L_0} (P(t) + iT(t)) \cot \frac{t-z}{a}\, dt + \frac{1}{2}\,\frac{\kappa-1}{\kappa+1}P^*. \quad (2.70)$$

P^*, T^* 有明显的力学意义，它们事实上分别是 $z=-\infty i$ 处的外应力压力和剪切力. 这从(2.42)便能看出. 事实上，在(2.40)和(2.42)中令 $z \to -\infty i$，注意到

$$\lim_{z\to -\infty i}(z-\bar{z})\Phi'(z) = 0, \quad (2.71)$$

立刻可得

$$\sigma_x(-\infty i) + \sigma_y(-\infty i) = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(-\infty i) = -\frac{4}{\kappa+1}P^*,$$

$$\sigma_y(-\infty i) - i\tau_{xy}(-\infty i) = -(P^* + iT^*),$$

于是

$$\sigma_y(-\infty i) = -P^*, \quad \tau_{xy}(-\infty i) = T^*, \quad (2.72)$$

$$\sigma_x(-\infty i) = -\frac{3-\kappa}{1+\kappa}P^*. \quad (2.73)$$

式(2.72)从力学上看是容易明白的：取出 S^- 中一个周期半带形，考虑到应力的周期性，其左右两纵向边线上应力彼此相消，立刻就得知上述结果.

注意到熟知

$$\mu > 0, \quad 1 < \kappa < 3, \quad (2.74)$$

因而，当 $P^* > 0$ 时，由(2.73)，得到 $\sigma_x(-\infty i) < 0$. 于是，得到下面的推论：

推论 2.2　*对于各向同性弹性半平面周期第一基本问题. 如在边界一个周期上正应力合力是压力：*

$$\int_{L_0} P(t)\,dt = a\pi P^* > 0,$$

则在 $z=-\infty i$ 处的 σ_x 也是压应力，由式(2.73)给出.

注　如果把水平方向位移周期性条件改为准周期的：即只要求

$$u(z+a\pi) = u(z) + q,$$

其中 q 为一未事先指定的待定常数，而另外已经给出 $\sigma_x(-\infty i)$，则第一基本问题也有唯一解.

例 2.3　设各向同性弹性半平面边界上部分地受有周期均匀压力，求弹性平衡(图 2.2).

设 P 为一已给(正)常数，而在边界的一个周期上，

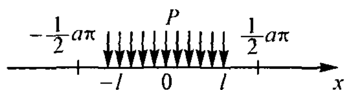


图 2.2

$$P(t)=\begin{cases}P, & |t|\leqslant l;\\ 0, & l<|t|\leqslant \frac{1}{2}a\pi,\end{cases}$$

$$T(t)=0.$$

记 γ_0 为线段 $-l\leqslant t\leqslant l$，且取自左至右为正向. 因这时，$P^*=\frac{2lP}{a\pi}$，所以由(2.70)，

$$\Phi(z)=\frac{P}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{lP}{a\pi}. \tag{2.75}$$

代入(2.36)与(2.37)中，容易计算得到

$$\sigma_x+\sigma_y=\frac{2P}{\pi}\left[\arg\sin\frac{t-z}{a}\right]_{\gamma_0}+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{4lP}{a\pi},$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=\frac{P(z-\bar{z})\sin\frac{2l}{a}}{a\pi\mathrm{i}\sin\frac{l+z}{a}\sin\frac{l-z}{a}}-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{4lP}{a\pi}, \tag{2.76}$$

其中$\left[\arg\sin\frac{t-z}{a}\right]_{\gamma_0}$ 表示 $\sin\frac{t-z}{a}$ 的幅角当 t 沿着 γ_0 自 $-l$ 变到 $+l$ 时的改变量.

如果在(2.75)中令 $l\to 0$，$P\to+\infty$，但保持 $2lP=P_0$，这就变成在边界上有一组周期集中压力 P_0 时第一基本问题的解. 这时，(2.75)式成为

$$\Phi(z)=-\frac{P_0}{2a\pi\mathrm{i}}\cot\frac{z}{a}+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{P_0}{2a\pi}, \tag{2.77}$$

而应力公式(2.76)就成为

$$\sigma_x+\sigma_y=-\frac{2P_0}{a\pi}\operatorname{Im}\cot\frac{z}{a}+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{2P_0}{a\pi},$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=\frac{P_0(\bar{z}-z)}{a^2\pi\mathrm{i}\sin^2\frac{z}{a}}-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{2P_0}{a\pi}. \tag{2.78}$$

如果在(2.75)中令 $a\to+\infty$，便回到半平面上在一段区间$[-l,l]$上受有均匀压力 P 时的应力分布：

$$\sigma_x+\sigma_y=\frac{2P}{\pi}[\arg(t-z)]_{\gamma_0},$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=\frac{2lP(z-\bar{z})}{\pi\mathrm{i}(l^2-z^2)};$$

这和 Мусхелишвили [1] 中的结果是一致的.

同样，在(2.78)中令 $a\to+\infty$，便得到半平面上在原点受有集中压力 P_0 时的解：

$$\sigma_x+\sigma_y=-\frac{2P_0}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{z},$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=\frac{P_0(\bar{z}-z)}{\pi\mathrm{i}z^2}.$$

例 2.4　同例 2.3，但在 γ_0 上受有均匀剪切力，即

$$P(t)=0,\quad T(t)=\begin{cases}T, & |t|\leqslant l,\\ 0, & l<|t|\leqslant\frac{1}{2}a\pi.\end{cases}$$

由于这时 $P^*=0$，因而由(2.70)，

$$\Phi(z)=\frac{T}{2a\pi}\int_{\gamma_0}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t. \tag{2.79}$$

将它代入(2.36)和(2.38)，容易算出

$$\sigma_x+\sigma_y=\frac{2T}{\pi}\ln\left|\frac{\sin\dfrac{l-z}{a}}{\sin\dfrac{l+z}{a}}\right|,$$

$$\sigma_y+\mathrm{i}\tau_{xy}=\frac{T\mathrm{i}}{\pi}\left[\arg\sin\frac{t-z}{a}\right]_{\gamma_0}+\frac{T(z-\bar{z})\sin\dfrac{2l}{a}}{2a\pi\sin\dfrac{l+z}{a}\sin\dfrac{l-z}{a}}. \tag{2.80}$$

如在(2.79),(2.80)中令 $l\to0$，$T\to+\infty$，但保持 $2lT=T_0$ 是一常数，并利用与(2.76)类似的讨论，则得周期集中剪切力的解答

$$\Phi(z)=-\frac{T_0}{2a\pi}\cot\frac{z}{a}, \tag{2.81}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x+\sigma_y&=-\frac{2T_0}{a\pi}\operatorname{Re}\cot\frac{z}{a},\\ \sigma_y+\mathrm{i}\tau_{xy}&=\frac{T_0\mathrm{i}}{a\pi}\operatorname{Im}\cot\frac{z}{a}+\frac{T_0(\bar{z}-z)}{2a^2\pi\sin^2\dfrac{z}{a}}.\end{aligned}\right\} \tag{2.82}$$

如再在(2.80),(2.82)中令 $a\to+\infty$，便可分别得到一段均匀剪切力和一个集中剪切力的解答. 这里便不再写出了.

2.3.2　第二基本问题

设在各向同性弹性半平面 S^- 的边界 x 轴上，已知复位移向量

$$u^{-}+\mathrm{i}v^{-}=g(t),$$

这里，$g(t)$ 以 $a\pi$ 为周期，连续(且允许含一任意常数项，相应于整个弹性体的刚性平移)，而 $g'(t)$ 分段地 $\in H$；又设在边界的一个周期上，外应力主矢量已知为 $X+\mathrm{i}Y$. 仍设应力、位移周期分布，且应力在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处有界，求弹性体的平衡问题就是周期第二基本问题.

定理 2.7 *在上述条件下，周期第二基本问题的解存在且唯一.*

证 由(2.39)式，现在要求解周期 Riemann 边值问题

$$\Phi^{+}(t)+\kappa\Phi^{-}(t)=2\mu g'(t),\quad t\in L,\tag{2.83}$$

且要求 $\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有界. 这个问题的一般解为

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^{+}(z)=\dfrac{\mu}{a\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g'(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t-\kappa C, & z\in S^{+},\\[2ex] \Phi^{-}(z)=-\dfrac{\mu}{\kappa a\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g'(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+C, & z\in S^{-},\end{cases}\tag{2.84}$$

其中 C 为任意常数.

于是，如不计刚性平移，便有

$$\varphi(z)=\begin{cases}\varphi^{+}(z)=-\dfrac{\mu}{\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g'(t)\log\sin\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t-\kappa Cz, & z\in S^{+},\\[2ex] \varphi^{-}(z)=\dfrac{\mu}{\kappa\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_0}g'(t)\log\sin\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+Cz, & z\in S^{-},\end{cases}\tag{2.85}$$

其中对数可任意取定一支. 由于

$$\int_{L_0}g'(t)\mathrm{d}t=[g(t)]_{L_0}=0,\tag{*}$$

这根本不影响 $\varphi(z)$ 的值.

由于当 $z\in S^{-}$ 时，

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{z})&=-\frac{\mu}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}g'(t)\log\sin\frac{t-\bar{z}}{a}\,\mathrm{d}t-\kappa C\bar{z}\\&=-\frac{\mu}{\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}g'(t)\overline{\log\sin\frac{t-z}{a}}\,\mathrm{d}t-\kappa C\bar{z},\end{aligned}$$

代入(2.44)，有

$$2\mu(u+\mathrm{i}v)=\frac{2\mu}{\pi}\int_{L_0}g'(t)\arg\sin\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+\kappa C(z-\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi(z)}.$$

由此可见，$u+\mathrm{i}v$ 不仅单值，且已以 $a\pi$ 为周期，因为当 z 改为 $z+a\pi$ 时，右边第一项根本不变，这还是由于(*)式之故.

为要决定 C，可考虑在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的外应力情况. 根据平衡条件，应有

$$\sigma_y(-\infty i) = \frac{Y}{a\pi}, \quad \tau_{xy}(-\infty i) = \frac{X}{a\pi}. \tag{2.86}$$

又由(2.84)，易知

$$\Phi(+\infty i) = -\kappa C, \quad \Phi(-\infty i) = C;$$

此外，(2.71) 式现在仍成立．于是，在(2.42) 中，令 $z = -\infty i$，注意到(2.86)，便有

$$\frac{Y - iX}{a\pi} = (\kappa + 1)C,$$

亦即

$$C = \frac{Y - iX}{(\kappa+1)a\pi}.$$

这样，最后得到

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{a\pi i}\displaystyle\int_{L_0} g'(t)\cot\frac{t-z}{a}\,dt - \dfrac{\kappa(Y-iX)}{(\kappa+1)a\pi}, & z \in S^+, \\ -\dfrac{\mu}{\kappa a\pi i}\displaystyle\int_{L_0} g'(t)\cot\frac{t-z}{a}\,dt + \dfrac{Y-iX}{(\kappa+1)a\pi}, & z \in S^-. \end{cases} \tag{2.87}$$

定理证毕．

由此还易于推出下面两个推论：

推论 2.3　当且仅当 $Y = 0$ 时，$\sigma_x(-\infty i) = 0$.

推论 2.4　当且仅当 $X = 0$ 时，水平位移 u 有界；$Y = 0$ 时，垂直位移 v 有界.

例 2.5　设半平面边界上有尖劈形周期位移，即在一个周期 L_0 上的位移已知为

$$g(t) = \begin{cases} \varepsilon\left(\dfrac{|t|}{l} - 1\right)i, & |t| \leqslant l; \\ 0, & l < |t| \leqslant \dfrac{1}{2}a\pi, \end{cases}$$

此外还设在 L_0 上的外应力主矢量为 0．求弹性平衡(图 2.3).

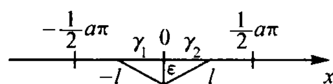


图 2.3

这时，$C = 0$．因此，当 $z \in S^-$ 时，由(2.87) 有(如果用 γ_1, γ_2 分别表示由 $-l$ 到 0 和 0 到 l 的两有向直线段)，

$$\Phi(z) = \frac{\mu\varepsilon}{\kappa l a \pi}\left(\int_{\gamma_1} \cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t - \int_{\gamma_2} \cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{\mu\varepsilon}{\kappa l \pi}\left\{\ln\left|\frac{\sin^2\frac{z}{a}}{\sin\frac{l+z}{a}\sin\frac{l-z}{a}}\right| + \mathrm{i}\left[\arg\sin\frac{t-z}{a}\right]_{\gamma_1} - \mathrm{i}\left[\arg\sin\frac{t-z}{a}\right]_{\gamma_2}\right\}.$$

由(2.87)也可有：当 $z \in S^-$ 时，$\Phi(\bar{z}) = \kappa\overline{\Phi(z)}$ 或即

$$\bar{\Phi}(z) = \kappa\Phi(z).$$

因此，最后代入(2.36)和(2.37)，得到应力分布公式：

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) = \frac{4\mu\varepsilon}{\kappa l \pi}\ln\left|\frac{\sin^2\frac{z}{a}}{\sin\frac{l+z}{a}\sin\frac{l-z}{a}}\right|,$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\mathrm{i}\tau_{xy} = -2(\kappa+1)\Phi(z) - 2(z-\bar{z})\Phi'(z)$$

$$= -\frac{2\mu\varepsilon(\kappa+1)}{\kappa l \pi}\left\{\ln\left|\frac{\sin^2\frac{z}{a}}{\sin\frac{l+z}{a}\sin\frac{l-z}{a}}\right| + \mathrm{i}\left[\arg\sin\frac{t-z}{a}\right]_{\gamma_1} - \mathrm{i}\left[\arg\sin\frac{t-z}{a}\right]_{\gamma_2}\right\}$$

$$-\frac{2\mu\varepsilon(z-\bar{z})}{\kappa l \pi a}\left\{2\cot\frac{z}{a} + \frac{\sin\frac{2z}{a}}{\sin\frac{l+z}{a}\sin\frac{l-z}{a}}\right\}.$$

如令 $a \to +\infty$，便可得一个尖劈时的应力分布公式如下(其中 θ_1, θ_2 已取如图 2.4 中所示之角，且均取正值)：

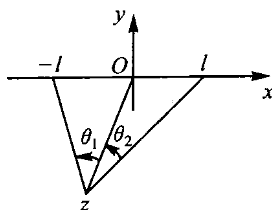


图 2.4

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{4\mu\varepsilon}{\kappa l \pi}\ln\left|\frac{z^2}{l^2 - z^2}\right|,$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\mathrm{i}\tau_{xy}$$

$$= -\frac{2\mu\varepsilon(\kappa+1)}{\kappa \pi l}\left[\ln\left|\frac{z^2}{l^2-z^2}\right| + \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)\right]$$

$$-\frac{4\mu\varepsilon(z-\bar{z})}{\kappa l \pi}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{l^2 - z^2}\right),$$

$$z \in S^-.$$

2.3.3 基本混合问题

设在各向同性弹性半平面边界的一个周期 L_0 上，其中一段 $\gamma_0(-l\leqslant t\leqslant l)$ 上已知位移

$$u^- + \mathrm{i}v^- = g(t),$$

仍设 $g(t)$ 连续，$g'(t)\in H$（且可差一常数项）．又设在 $L_0' = L_0 - \gamma_0$ 上，外应力已知，例如不妨设为 0：

$$\sigma_y^-(t) = \tau_{xy}(t) = 0,\quad l<|t|\leqslant \frac{1}{2}a\pi.$$

此外，还已知 γ_0 上的外应力主矢量 $X+\mathrm{i}Y$．以上诸条件都是以 $a\pi$ 为周期的．仍设应力、位移都是周期的，且在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处应力有界，求弹性平衡．这个问题称为周期基本混合问题．

定理 2.8 在上述条件下，周期基本混合问题的解存在唯一．

证 应注意到，一般地，在 $z=\pm l$ 附近，应力可能无界．

与前段所述理由相类似，现在要求解周期 Riemann 边值问题：

$$\Phi^+(t) + \kappa\Phi^-(t) = 2\mu g'(t),\quad t\in\gamma_0. \tag{2.88}$$

这与1.2.2节中的特例相同，只要把那里的 K 理解为 κ，并且这里要求的也是 h_0 类中的解．

由(1.48)式知，这问题的一般解为

$$\Phi(z) = \frac{\mu X(z)}{a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t + X(z)\left(C_0\tan\frac{z}{a}+C_1\right), \tag{2.89}$$

其中的典则函数

$$X(z) = \left(\tan\frac{z}{a}+\tan\frac{l}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{l}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta}, \tag{2.90}$$

这里

$$\beta = \frac{\ln\kappa}{2\pi}. \tag{2.91}$$

且 $X(z)$ 已取定一支，例如，使

$$\lim_{z\to\pm\frac{1}{2}a\pi}\tan\frac{z}{a}X(z) = 1, \tag{2.92}$$

容易证明就是这样的一支：令

$$\zeta = \tan\frac{z}{a},\quad L = \tan\frac{l}{a},$$

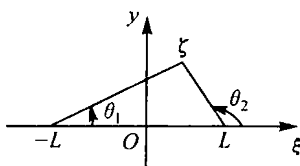


图 2.5

取 ζ 平面中把 $-L$ 到 $+L$ 沿实轴剖开后的如图 2.5 中所示的那一支：

$$\arg(\zeta+L)=\theta_1,$$
$$\arg(\zeta-L)=\theta_2,$$

其中 $0<\theta_1,\theta_2<\pi$.

不论 C_0,C_1 如何选取，因 $\Phi(z)$ 已以 $a\pi$ 为周期，因此应力也已以 $a\pi$ 为周期. 为要决定 C_0,C_1，只要利用位移周期性条件和在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处应力的平衡条件即可，具体说明如下.

首先注意到

$$\begin{aligned}X(-\infty\mathrm{i})&=\exp\left\{\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta\right)\log(-\mathrm{i}+L)-\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta\right)\log(-\mathrm{i}-L)\right\}\\&=\exp\left\{\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta\right)\left[\log\cos\frac{l}{a}+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l}{a}\right)\right]\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta\right)\left[\ln\cos\frac{l}{a}+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{l}{a}\right)\right]\right\}\\&=\mathrm{i}e^{\frac{-2\beta l}{a}}\cos\frac{l}{a},\end{aligned}$$

同理，

$$X(+\infty\mathrm{i})=-\mathrm{i}e^{\frac{2\beta l}{a}}\cos\frac{l}{a}.$$

如果记 γ_0 对周期 $a\pi$（L_0 的长度）之比为 λ：$\lambda=\dfrac{2l}{a\pi}$，且令

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{2\beta l}{a}=\lambda\ln\sqrt{\kappa},\\B&=\beta\pi-\frac{2\beta l}{a}=(1-\lambda)\log\sqrt{\kappa},\end{aligned}\right\}\tag{2.93}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}X(+\infty\mathrm{i})&=-\mathrm{i}e^{A}\cos\frac{l}{a},\\X(-\infty\mathrm{i})&=\mathrm{i}e^{-A}\cos\frac{l}{a}.\end{aligned}\right\}\tag{2.94}$$

如以 Λ_+,Λ_- 分别记上半平面和下半平面中的一水平周期线段（图 2.6），则 $\int_{\Lambda_\pm}X(z)\mathrm{d}z$ 显然和 $\Lambda_\pm$ 的高度无关. 因此，可以得到：

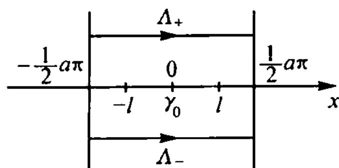


图 2.6

$$\left.\begin{aligned}\int_{\Lambda_+} X(z)\mathrm{d}z &= a\pi X(+\infty\mathrm{i}) = -a\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{A}\cos\frac{l}{a},\\ \int_{\Lambda_-} X(z)\mathrm{d}z &= a\pi X(-\infty\mathrm{i}) = a\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-A}\cos\frac{l}{a}.\end{aligned}\right\}\tag{2.95}$$

同理，

$$\left.\begin{aligned}\int_{\Lambda_+} X(z)\tan\frac{z}{a}\,\mathrm{d}z &= a\pi\mathrm{e}^{A}\cos\frac{l}{a},\\ \int_{\Lambda_-} X(z)\tan\frac{z}{a}\,\mathrm{d}z &= a\pi\mathrm{e}^{-A}\cos\frac{l}{a}.\end{aligned}\right\}\tag{2.96}$$

又若 $t\in\gamma_0$，则还有

$$\left.\begin{aligned}\int_{\Lambda_+} X(z)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}z &= a\pi\mathrm{e}^{A}\cos\frac{l}{a},\\ \int_{\Lambda_-} X(z)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}z &= a\pi\mathrm{e}^{-A}\cos\frac{l}{a}.\end{aligned}\right\}\tag{2.97}$$

于是，利用(2.95)～(2.97)，易见，当 $z\in S^-$ 时，

$$\begin{aligned}\varphi(z+a\pi)-\varphi(z) &= \int_{\Lambda_-}\Phi(z)\mathrm{d}z\\ &= a\pi\mathrm{e}^{-A}\cos\frac{l}{a}\left(\frac{\mu}{a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t + C_0 + \mathrm{i}C_1\right),\\ \varphi(\bar{z}+a\pi)-\varphi(\bar{z}) &= \int_{\Lambda_+}\Phi(z)\mathrm{d}z\\ &= a\pi\mathrm{e}^{A}\cos\frac{l}{a}\left(\frac{\mu}{a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t + C_0 - \mathrm{i}C_1\right).\end{aligned}$$

因而，由(2.44)，位移周期性条件成为

$$\begin{aligned}&\kappa\mathrm{e}^{-A}\left(\frac{\mu}{a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t + C_0 + \mathrm{i}C_1\right)\\ &+\mathrm{e}^{A}\left(\frac{\mu}{a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t + C_0 - \mathrm{i}C_1\right) = 0.\end{aligned}$$

计及 $\mathrm{e}^{B}=\sqrt{\kappa}\mathrm{e}^{-A}$，简化后有

$$C_0 + \mathrm{i}C_1\tanh B = -\frac{\mu}{a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t.\tag{2.98}$$

其次，考虑在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的应力平衡条件：

$$\sigma_y(-\infty\mathrm{i}) = \frac{Y}{a\pi},\quad \tau_{xy}(-\infty\mathrm{i}) = \frac{X}{a\pi}.$$

计及

$$\Phi(+\infty\mathrm{i}) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{A}\cos\frac{l}{a}\left(\frac{\mu}{a\pi}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t + C_1 + C_0\mathrm{i}\right),$$

$$\Phi(-\infty\mathrm{i})=\mathrm{i}\mathrm{e}^{-A}\cos\frac{l}{a}\left(-\frac{\mu}{a\pi}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t+C_1-C_0\mathrm{i}\right),$$

同时注意到此时(2.71)仍成立，因此，由(2.42)，得到平衡条件为

$$\frac{Y-\mathrm{i}X}{2a\pi}=\mathrm{i}\cos\frac{l}{a}\left(\frac{\mu\sinh A}{a\pi}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t+C_1\cosh A+\mathrm{i}C_0\sinh A\right),\tag{2.99}$$

或即

$$C_0\tanh A-\mathrm{i}C_1=\frac{-Y+\mathrm{i}X}{2a\pi\cos\dfrac{l}{a}\cosh A}-\frac{\mu\tanh A}{a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\frac{g'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t.\tag{2.99$'$}$$

注意到A,B均>0，由(2.98)和(2.99)便可唯一确定C_0,C_1. 因此问题的解存在且唯一.

例 2.6 周期水平直基底压头.

设各向同性弹性半平面S^-上有一组周期为$a\pi$的压头，每一个的基底为水平直线段，长$2l$. 又假设在每一压头上作用有压力P_0，而在压头以外的边界上无外应力. 求弹性体平衡.

这时，在γ_0上，已知$g'(t)\equiv 0$；又$X=0$，$Y=-P_0$. 现在(2.98)，(2.99)分别成为

$$C_0+\mathrm{i}C_1\tanh B=0,$$

$$C_0\tanh A-\mathrm{i}C_1=\frac{P_0}{2a\pi\cos\dfrac{l}{a}\cosh A}.$$

解出C_0,C_1，计及

$$\cosh(A+B)=\cosh\beta\pi=\frac{\kappa+1}{2\sqrt{\kappa}},$$

有

$$C_0=\frac{\sqrt{\kappa}P_0\sinh B}{(\kappa+1)a\pi\cos\dfrac{l}{a}},\quad C_1=\frac{\mathrm{i}\sqrt{\kappa}P_0\cosh B}{(\kappa+1)a\pi\cos\dfrac{l}{a}}.$$

最后代入(2.89)式，得

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{\kappa}P_0X(z)}{(\kappa+1)a\pi\cos\dfrac{l}{a}}\left(\sinh B\tan\frac{z}{a}+\mathrm{i}\cosh B\right),\tag{2.100}$$

其中$X(z)$由(2.90)给出.

下面计算在压头正下方边界上的应力分布.

在 γ_0 上，$|t|\leqslant l$，显然，当 z 自上半平面趋于 γ_0 上的 t 值时，$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$（图 2.5），于是

$$
\begin{aligned}
X^+(t) &= \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta\right)\ln\left|\tan\frac{t}{a}+\tan\frac{l}{a}\right|\right. \\
&\qquad \left. -\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta\right)\left(\ln\left|\tan\frac{t}{a}-\tan\frac{l}{a}\right|+\pi\mathrm{i}\right)\right\} \\
&= -\frac{\mathrm{i}\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\tan^2\dfrac{l}{a}-\tan^2\dfrac{t}{a}}}\exp\left\{\mathrm{i}\beta\ln\left|\frac{\sin\dfrac{l+t}{a}}{\sin\dfrac{l-t}{a}}\right|\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.101}
$$

代入(2.100)，得

$$
\Phi^+(t) = \frac{\kappa P_0\exp\left\{\mathrm{i}\beta\ln\left|\dfrac{\sin\dfrac{l+t}{a}}{\sin\dfrac{l-t}{a}}\right|\right\}}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{\sin\dfrac{l+t}{a}\sin\dfrac{l-t}{a}}} \cdot\left(\cosh B\cos\frac{t}{a}-\mathrm{i}\sinh B\sin\frac{t}{a}\right).
$$

如用 $P(t)$，$T(t)$ 分别表示 γ_0 上的压力和剪切力分布，则由(2.42)，

$$
\begin{aligned}
P(t)+\mathrm{i}T(t) &= -\sigma_y(t)+\mathrm{i}\tau_{xy}(t) = \Phi^+(t)-\Phi^-(t) \\
&= \frac{\kappa+1}{\kappa}\Phi^+(t),
\end{aligned}
$$

因此最后有

$$
P(t)+\mathrm{i}T(t) = \frac{P_0}{a\pi}\frac{\cosh B\cos\dfrac{t}{a}-\mathrm{i}\sinh B\sin\dfrac{t}{a}}{\sqrt{\sin\dfrac{l+t}{a}\sin\dfrac{l-t}{a}}} \cdot\exp\left\{\mathrm{i}\beta\ln\left|\frac{\sin\dfrac{l+t}{a}}{\sin\dfrac{l-t}{a}}\right|\right\}. \tag{2.102}
$$

令 $a\to\infty$ 时，便可得到一个压头时的特例．注意这时由(2.93)，$B\to\ln\sqrt{\kappa}$，因而，有 $\cosh B\to\dfrac{\kappa+1}{2\sqrt{\kappa}}$，$\sinh B\to\dfrac{\kappa-1}{2\sqrt{\kappa}}$，这样，可以得到：

$$
P(t)+\mathrm{i}T(t) = \frac{(\kappa+1)P_0}{2\pi\sqrt{\kappa}\sqrt{l^2-t^2}}\exp\left\{\mathrm{i}\beta\log\left|\frac{l+t}{l-t}\right|\right\}.
$$

这与 B. M. Абрамов 的公式一致(参见 Мусхелишвили [1], § 114a①).

例 2.7　周期倾斜直基底压头.

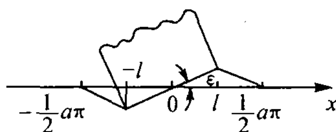


图 2.7

设压头基底同前例，但与半平面边界作倾斜角 ε (图 2.7). 又设每个压头上外力主矢量为零：$X=Y=0$，在压头以外仍设无外应力.

这时 $g(t)=\mathrm{i}\varepsilon t$，或

$$g'(t)=\mathrm{i}\varepsilon,\quad t\in\gamma_0.$$

现在(2.98),(2.99) 分别成为

$$C_0+\mathrm{i}C_1\tanh B=-\frac{\mu\varepsilon}{a\pi}\int_{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}t}{X^+(t)},$$

$$C_0\tanh A-\mathrm{i}C_1=-\frac{\mu\varepsilon}{a\pi}\tanh A\int_{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}t}{X^+(t)}.$$

由此显然

$$C_1=0,\quad C_0=-\frac{\mu\varepsilon}{a\pi}\int_{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}t}{X^+(t)}.$$

代入(2.89)，化简后得到

$$\Phi(z)=\frac{\mu\varepsilon X(z)}{a\pi}\int_{\gamma_0}\left(\cot\frac{t-z}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)\frac{\mathrm{d}t}{X^+(t)}.\tag{2.103}$$

为了进一步计算，令

$$I(z)=\int_{\gamma_0}\left(\cot\frac{t-z}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)\frac{\mathrm{d}t}{X^+(t)}.$$

作变换 $u=\tan\frac{t}{a}$，并令 $\zeta=\tan\frac{z}{a}$，$L=\tan\frac{l}{a}$，则

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{z}{a}I(z)=I_*(\zeta)=\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(u-\zeta)X_*^+(u)},$$

其中

$$X_*(\zeta)=X(z)=(\zeta+L)^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta}(\zeta-L)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta},$$

并且所取的支同前，即

$$\lim_{\zeta\to\infty}\zeta X_*(\zeta)=1.$$

为了计算 $I_*(\zeta)$，作辅助函数

① 该著作 § 114a 中公式(8) 原文本中右边分母上漏掉因子 2，中译本也未改正.

$$\Omega(\zeta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Lambda}\frac{\mathrm{d}w}{(1+w^2)(w-\zeta)X_*(w)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Lambda}\frac{f(w)}{w-\zeta}\,\mathrm{d}w,$$

其中 Λ 为 w 平面中包围线段 $-L\leqslant u\leqslant L$ 的任一光滑闭路，但 ζ 在其外，并沿时针向积分．令 Λ 无限地收缩于上述线段，并注意 $X_*^+(u)=-\kappa X_*^-(u)$，易见

$$\Omega(\zeta)=\frac{\kappa+1}{2\pi\mathrm{i}}I_*(\zeta)\quad 或\quad I_*(\zeta)=\frac{2\pi\mathrm{i}}{\kappa+1}\Omega(\zeta).\qquad (*)$$

现在只要计算 $\Omega(\zeta)$．因

$$f(\zeta)=\frac{1}{(1+\zeta^2)X_*(\zeta)},$$

注意到(2.94)，易见 $f(\zeta)$ 在 $\zeta=\mathrm{i}$ 处的主部为

$$\frac{1}{2\mathrm{i}(\zeta-\mathrm{i})X_*(\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}(\zeta-\mathrm{i})X(+\infty\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{e}^{-A}}{2\cos\dfrac{l}{a}\,(\zeta-\mathrm{i})},$$

在 $\zeta=-\mathrm{i}$ 处的主部为

$$-\frac{1}{2\mathrm{i}(\zeta+\mathrm{i})X_*(-\mathrm{i})}=-\frac{1}{2\mathrm{i}(\zeta+\mathrm{i})X(-\infty\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{e}^{A}}{2\cos\dfrac{l}{a}\,(\zeta+\mathrm{i})}.$$

于是，由留数定理，有

$$\Omega(\zeta)=\frac{1}{(1+\zeta^2)X_*(\zeta)}-\frac{\mathrm{e}^{-A}}{2\cos\dfrac{l}{a}\,(\zeta-\mathrm{i})}-\frac{\mathrm{e}^{A}}{2\cos\dfrac{l}{a}\,(\zeta+\mathrm{i})}$$

$$=\frac{\cos^2\dfrac{z}{a}}{X(z)}-\frac{\cos^2\dfrac{z}{a}}{\cos\dfrac{l}{a}}\left(\cosh A\,\tan\frac{z}{a}-\mathrm{i}\sinh A\right).$$

将它代入(*)式中，再回到 $I(z)$，便得

$$I(z)=\frac{2a\pi\mathrm{i}}{\kappa+1}\left[\frac{1}{X(z)}-\sec\frac{l}{a}\left(\cosh A\,\tan\frac{z}{a}-\mathrm{i}\sinh A\right)\right].\qquad(2.104)$$

由(2.103)，最后得

$$\Phi(z)=\frac{2\mu\varepsilon\mathrm{i}}{\kappa+1}\left[1-\frac{X(z)}{\cos\dfrac{l}{a}}\left(\cosh A\,\tan\frac{z}{a}-\mathrm{i}\sinh A\right)\right].\qquad(2.105)$$

因此，问题已完全解决．

在压头正下方的边界上，仿前例易知，

$$P(t)+\mathrm{i}T(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\frac{\kappa+1}{\kappa}\Phi^+(t)-\frac{2\mu\varepsilon\mathrm{i}}{\kappa}$$

$$=-\frac{2\mu\varepsilon \mathrm{i} X^{+}(t)}{\kappa \cos \dfrac{l}{a}}\left(\cosh A \ \tan \frac{t}{a}-\mathrm{i}\ \sinh A\right).$$

再用(2.101)代入，有

$$P(t)+\mathrm{i}T(t)=-\frac{2\mu\varepsilon\left(\cosh A\ \sin \dfrac{t}{a}-\mathrm{i}\ \sinh A\ \cos \dfrac{t}{a}\right)}{\sqrt{\kappa}\sqrt{\sin \dfrac{l+t}{a}\ \sin \dfrac{l-t}{a}}}$$

$$\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\beta \ln\left|\frac{\sin \dfrac{l+t}{a}}{\sin \dfrac{l-t}{a}}\right|\right\}. \tag{2.106}$$

如在(2.105),(2.106)中，令 $a\to+\infty$，并注意到

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{X(z)}{a}=X_0(z)=(z+l)^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\beta}(z-l)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\beta},$$

$$\lim_{a\to+\infty}\cosh A=1,\quad \lim_{a\to+\infty}a\ \sinh A=2l\beta,$$

则得到一个周期中一个倾斜直基底压头的相应公式：

$$\Phi(z)=\frac{2\mu\varepsilon \mathrm{i}}{\kappa+1}[1-(z-2l\beta \mathrm{i})X_0(z)],$$

$$P(t)+\mathrm{i}T(t)=-\frac{2\mu\varepsilon \mathrm{i}}{\kappa}(t-2l\beta \mathrm{i})X_0^{+}(t)$$

$$=-\frac{2\mu\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}\frac{t-2l\beta \mathrm{i}}{\sqrt{l^2-t^2}}\exp\left\{\mathrm{i}\beta\ln\left|\frac{l+t}{l-t}\right|\right\};$$

这和 Мусхелишвили [1] 中的结果是一致的.

2.4 各向同性平面弹性理论中的周期接触问题

2.4.1 无摩擦存在时的情况

现设有一列周期压头(基底形状相同)压在各向同性弹性半平面 S^- 的边界上. 暂设压头和半平面间不存在摩擦力. 在压头之外，半平面边界上的条件仍同例 2.7，即 $\sigma_y=\tau_{xy}=0$；而在基底的正下方，只知道半平面边界上的纵向位移 $v(t)$，而不知道横向位移 $u(t)$，但由于无摩擦力，因而仍有 $\tau_{xy}=0$，而 σ_y 则不知道. 此外，假设每一压头上的作用力是正压力 P_0，即 $Y=-P_0$，而 $X=0$，求弹性平衡.

设 $y=f(x)$ 为压入弹性半平面的压头的基底方程，其中 $f(x)$ 以 $a\pi$ 为周

期，且 $f'(x) \in H$. 在一个周期 L_0 上，受压区间仍设为 γ_0：$-l \leqslant t \leqslant l$. 于是，在 L_0 上，其边值条件为

$$\tau_{xy}^-(t) = 0,\ t \in L_0;\quad \sigma_y^-(t) = 0,\ t \in L_0 - \gamma_0;$$
$$v^-(t) = f(t),\quad t \in \gamma_0;$$

又在 γ_0 上的外应力主矢量 $X + \mathrm{i}Y = -P_0\mathrm{i}$.

由这些边值条件，首先了解到，在 $z = -\infty\mathrm{i}$ 处，根据平衡原理，应有

$$\sigma = \sigma_y(-\infty\mathrm{i}) = -\frac{P_0}{a\pi},\quad \tau = \tau_{xy}(-\infty\mathrm{i}) = 0. \tag{2.107}$$

注意 $\Phi(z)$ 在沿 γ_0 及其周期对应线段剖开的平面上是全纯的. 由(2.42)，显然，因为 $t \in \gamma_0$ 时 $\tau_{xy} = 0$，所以

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \overline{\Phi}^-(t) - \overline{\Phi}^+(t),\quad t \in \gamma_0,$$

或即

$$\Phi^+(t) + \overline{\Phi}^+(t) = \Phi^-(t) + \overline{\Phi}^-(t),\quad t \in \gamma_0.$$

这表明 $\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)$ 在全平面上全纯. 而它在 $z = \pm\infty\mathrm{i}$ 处有界，且以 $a\pi$ 为周期，用一保角变换，立刻可以知道它恒等于一个常数：

$$\Phi(z) + \overline{\Phi}(z) = 2\beta_2. \tag{2.108}$$

由(2.41)，取 t 在 x 轴上时，因为 $\tau_{xy} = 0$，显然，β_2 为一实数.

由(2.43)，在 x 轴上，有

$$2\mu(u' + \mathrm{i}v') = \kappa\Phi^-(t) + \Phi^+(t),$$

取共轭值，并利用(2.108)，得

$$2\mu(u' - \mathrm{i}v') = -(\kappa\Phi^+(t) + \Phi^-(t)) + 2(\kappa + 1)\beta_2.$$

把这两式相减，并注意到，在 γ_0 上，$v' = f'(t)$，于是得到 Riemann 周期边值问题：

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{4\mu\mathrm{i}}{\kappa + 1}f'(t) + 2\beta_2,\quad t \in \gamma_0. \tag{2.109}$$

现在要求这一问题的一般周期解，在 $z = \pm\infty\mathrm{i}$ 有界者. 这时可利用第一章(1.27)′式；但注意到，对于(2.109)，若右端只有 $2\beta_2$ 这一项(而 $f'(t) = 0$)，它显然有特解 β_2. 因此，得到(2.109) 的一般解为

$$\Phi(z) = \frac{2\mu}{(\kappa + 1)a\pi\sqrt{R(z)}}\int_{\gamma_0} f'(t)\sqrt{R(t)}\cot\frac{t - z}{a}\,\mathrm{d}t + \frac{\beta_0\tan\dfrac{z}{a} + \beta_1}{\sqrt{R(z)}} + \beta_2, \tag{2.110}$$

这里已将 $X(z)$ 改写如下：

$$X(z)=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{R(z)}},\quad R(z)=\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z}{a},\tag{2.111}$$

且当 z 由上半平面趋于 $t\in\gamma_0$ 时，$\sqrt{R(t)}$ 取正值那一支. 从(2.110)还可看出

$$\lim_{x\to\pm\infty\mathrm{i}}(z-\overline{z})\Phi'(z)=0\tag{2.112}$$

仍成立.

现在来证明，在给出的条件下，β_0 与 β_1 必须为实数. 首先，要注意到

$$\overline{X}(z)=X(z).\tag{2.113}$$

这可以这样看出：因为 $\overline{X}(z)=\overline{X(\overline{z})}$，所以它和 $X(z)$ 表示同一根式，因此只可能有 $\overline{X}(z)=\pm X(z)$；但若比较(2.109)式和(2.88)式左边，知道这里的典则函数同那里的一样，只要令那里的 κ 改作为 1，也就是把(2.93)中的 A 改作为 0，于是现在应有

$$\overline{X}(-\infty\mathrm{i})=\overline{X(+\infty\mathrm{i})}=X(-\infty\mathrm{i}),$$

即上式中要取正号，也就是(2.113)式成立. 再将(2.113)和(2.111)比较，可以得到

$$\overline{\sqrt{R(\overline{z})}}=-\sqrt{R(z)}.$$

又因为 $f'(t)$ 为实函数，因而，由(2.110)有

$$\overline{\Phi}(z)=-\frac{2\mu}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{R(z)}}\int_{\gamma_0}f'(t)\sqrt{R(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$-\frac{\overline{\beta}_0\tan\dfrac{z}{a}+\overline{\beta_1}}{\sqrt{R(z)}}+\beta_2.$$

再把它和(2.110)相加，根据(2.108)，可以知道 β_0，β_1 都是实数.

剩下的问题就是要确定实常数 β_0，β_1，β_2.

首先考虑位移周期性条件. 由于

$$\sqrt{R(\pm\infty\mathrm{i})}=\pm\frac{1}{\cos\dfrac{l}{a}},\tag{2.114}$$

因而

$$\int_{\Lambda_\pm}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{R(z)}}=\pm a\pi\cos\frac{l}{a},$$

$$\int_{\Lambda_\pm}\frac{\tan\dfrac{z}{a}}{\sqrt{R(z)}}\mathrm{d}z=\int_{\Lambda_\pm}\frac{\cot\dfrac{t-z}{a}}{\sqrt{R(z)}}\mathrm{d}z=a\pi\mathrm{i}\cos\frac{l}{a},$$

其中 Λ_+ 和 Λ_- 见图 2.6，于是，由(2.112)式，当 z 在下半平面 S^- 时，

$$\varphi(z+a\pi)-\varphi(z)=\int_{\Lambda_-}\Phi(z)\mathrm{d}z=\frac{2\mu\mathrm{i}\cos\dfrac{l}{a}}{\kappa+1}\int_{\gamma_0}f'(t)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$+a\pi\cos\frac{l}{a}(\mathrm{i}\beta_0-\beta_1)+a\pi\beta_2,$$

$$\varphi(\bar{z}+a\pi)-\varphi(\bar{z})=\int_{\Lambda_+}\Phi(z)\mathrm{d}z=\frac{2\mu\mathrm{i}\cos\dfrac{l}{a}}{\kappa+1}\int_{\gamma_0}f'(t)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$+a\pi\cos\frac{l}{a}(\mathrm{i}\beta_0+\beta_1)+a\pi\beta_2.$$

因而，由(2.44)式，$u+\mathrm{i}v$ 的周期性条件成为

$$\mathrm{i}(\kappa+1)\beta_0-(\kappa-1)\beta_1+\frac{\kappa+1}{\cos\dfrac{l}{a}}\beta_2=\frac{2\mu}{a\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}f'(t)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t.$$

于是，可以得到

$$\beta_0=-\frac{2\mu}{(\kappa+1)a\pi}\int_{\gamma_0}f'(t)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t,\tag{2.115}$$

$$(\kappa-1)\beta_1-\frac{\kappa+1}{\cos\dfrac{l}{a}}\beta_2=0.\tag{2.116}$$

再考虑在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的应力平衡条件. 由(2.110)式

$$\Phi(-\infty\mathrm{i})=\frac{2\mu\mathrm{i}\cos\dfrac{l}{a}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{\gamma_0}f'(t)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t-\beta_1\cos\frac{l}{a}+\beta_2+\mathrm{i}\beta_0\cos\frac{l}{a},$$

$$\Phi(+\infty\mathrm{i})=\frac{2\mu\mathrm{i}\cos\dfrac{l}{a}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{\gamma_0}f'(t)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t+\beta_1\cos\frac{l}{a}+\beta_2+\mathrm{i}\beta_0\cos\frac{l}{a}.$$

所以由(2.42)式，并计及(2.112)，可以得到

$$\sigma_y(-\infty\mathrm{i})-\mathrm{i}\tau_{xy}(-\infty\mathrm{i})=\Phi(-\infty\mathrm{i})-\Phi(+\infty\mathrm{i})=-2\beta_1\cos\frac{l}{a}.$$

再利用(2.107)，得

$$\beta_1=\frac{P_0}{2a\pi\cos\dfrac{l}{a}}.\tag{2.117}$$

代入(2.116)式，可得

$$\beta_2=\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{P_0}{2a\pi}.\tag{2.118}$$

将(2.115),(2.117),(2.118)代入(2.110)式，最后得到所欲求的唯一解为

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) = & \frac{2\mu}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{R(z)}}\int_{\gamma_0} f'(t)\sqrt{R(t)}\left(\cot\frac{t-z}{a} - \tan\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}t \\
& + \frac{P_0}{2a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{R(z)}} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{P_0}{2a\pi}.
\end{aligned} \tag{2.119}
$$

这样，能易于如下计算压头正下方边界上的压力分布 $P(t)$.

设 $t_0 \in \gamma_0$. 因为 $\tau_{xy}^-(t_0) = 0$，故

$$
P(t_0) = -\sigma_y^-(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0).
$$

应用推广的 Plemelj 公式，不难得到

$$
\begin{aligned}
P(t_0) = & \frac{4\mu}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{R(t_0)}}\int_{-l}^{l} f'(t)\sqrt{R(t)}\left(\cot\frac{t-t_0}{a} - \tan\frac{t_0}{a}\right)\mathrm{d}t \\
& + \frac{P_0}{a\pi\cos\frac{1}{a}\sqrt{R(t_0)}}.
\end{aligned} \tag{2.120}
$$

下面考虑当 P_0 甚小，不足使压头的角点接触弹性半平面的情况.

为简单起见，设压头基底是对称的，即 $f(t)$ 为偶函数. 于是，压头和弹性接触的一周期线段由对称性可设为 $\gamma_0: -l \leqslant t \leqslant l$，但这时 l 为一未知正数(小于压头底半宽)，决定它的条件是 $P(\pm l) = 0$.

这时，(2.119) 式中含 $\tan\frac{z}{a}$ 的项可略去，而(2.120) 式成为

$$
\begin{aligned}
P(t_0) = & \frac{4\mu}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{R(t_0)}}\int_{-l}^{l} f'(t)\sqrt{R(t)}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t \\
& + \frac{P_0}{a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{R(t_0)}} \\
= & \frac{4\mu}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{R(t_0)}}\int_{-l}^{l} \frac{f'(t)(R(t)-R(t_0))}{\sqrt{R(t)}}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t \\
& + \frac{4\mu\sqrt{R(t_0)}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)}{\sqrt{R(t)}}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t \\
& + \frac{P_0}{a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{R(t_0)}}.
\end{aligned}
$$

又因

$$
(R(t)-R(t_0))\cot\frac{t-t_0}{a} = -\tan\frac{t}{a}\sec^2\frac{t_0}{a} - \tan\frac{t_0}{a}\sec^2\frac{t}{a},
$$

并注意到 $f'(t)$ 为奇函数，于是，

$$P(t_0) = -\frac{4\mu\sec^2\frac{t_0}{a}}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{R(t_0)}}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)\tan\frac{t}{a}}{\sqrt{R(t)}}\mathrm{d}t + \frac{4\mu\sqrt{R(t_0)}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)}{\sqrt{R(t)}}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t + \frac{P_0}{a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{R(t_0)}}$$

$$= -\frac{4\mu\sec^2\frac{t_0}{a}}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{R(t_0)}}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)\tan\frac{t}{a}}{\sqrt{R(t)}}\mathrm{d}t + \frac{P_0}{a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{R(t_0)}} + \frac{4\mu\sqrt{R(t_0)}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)\tan\frac{t}{a}}{\sqrt{R(t)}}\mathrm{d}t + \frac{4\mu\sqrt{R(t_0)}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)}{\sqrt{R(t)}}\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t.$$

当 $t_0\to\pm l$ 时，上式右边后两项皆趋于 0，其中第一项显然，而第二项中的积分(主值) 含有对数奇异性，但 $\sqrt{R(t_0)}$ 为 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小.

因此，应选取 l，使得下式成立：

$$P_0 = \frac{4\mu}{(\kappa+1)\cos\frac{l}{a}}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)\tan\frac{t}{a}}{\sqrt{R(t)}}\mathrm{d}t, \tag{2.121}$$

上式即为决定 l 的条件. 这方程也可这样解释：如果需要把每一周期压头加压使与弹性半平面接触的区间的长为 $2l$，则所需的压力 P_0 由(2.121) 给出. 这时压头下的压力分布为

$$P(t_0) = \frac{4\mu\sqrt{R(t_0)}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)}{\sqrt{R(t)}}\left(\cot\frac{t-t_0}{a}+\tan\frac{t}{a}\right)\mathrm{d}t. \tag{2.122}$$

如果在(2.119) ~ (2.122) 式中，令 $a\to+\infty$，可以得到一个压头时的相应公式：

$$\Phi(z) = \frac{4\mu}{(\kappa+1)\pi\sqrt{l^2-z^2}}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)\sqrt{l^2-t^2}}{t-z}\mathrm{d}t + \frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2-z^2}},$$

$$z\in S^-; \tag{2.119'}$$

$$P(t_0) = \frac{4\mu}{(\kappa+1)\pi\sqrt{l^2 - t_0^2}}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)\sqrt{l^2 - t^2}}{t - t_0}\mathrm{d}t + \frac{P_0}{2\pi\sqrt{l^2 - t_0}},$$

$$-l < t_0 < l; \qquad (2.120)'$$

$$P_0 = \frac{4\mu}{\kappa+1}\int_{-l}^{l}\frac{tf'(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}}\mathrm{d}t; \qquad (2.121)'$$

$$P(t_0) = \frac{4\mu\sqrt{l^2 - t_0^2}}{(\kappa+1)\pi}\int_{-l}^{l}\frac{f'(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}}\frac{\mathrm{d}t}{t - t_0}. \qquad (2.122)'$$

这些公式都与 Мусхелишвили [1] 中的结果相同.

例 2.8 周期压头有直水平基底.

这时，$f'(t) = 0$. 由(2.119)，(2.120) 式，

$$\Phi(z) = \frac{P_0}{2a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{\tan^2\frac{l}{a} - \tan^2\frac{z}{a}}} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{P_0}{2a\pi}$$

$$= \frac{P_0\cos\frac{z}{a}}{2a\pi\sqrt{\sin\frac{l+z}{a}\sin\frac{l-z}{a}}} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{P_0}{2a\pi},$$

$$P(t) = \frac{P_0}{a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{\tan^2\frac{l}{a} - \tan^2\frac{t}{a}}}$$

$$= \frac{P_0\cos\frac{t}{a}}{a\pi\sqrt{\sin\frac{l+t}{a}\sin\frac{l-t}{a}}},$$

其中根号已取定这样的一支：当平面用 γ 剖开后，z 在上半平面趋于 γ_0 上的点 t 时，取正值.

例 2.9 压头有直倾斜基底.

仍设倾角为 ε (图 2.7). 这时 $f'(t) = \varepsilon$. 于是，由(2.119) 式，

$$\Phi(z) = \frac{2\mu\varepsilon}{(\kappa+1)a\pi\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}\left(\cot\frac{t-z}{2} - \tan\frac{z}{a}\right)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{P_0}{2a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{R(z)}} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{P_0}{2a\pi}.$$

此式右边第一项实际上就是

$$\frac{2\mu\varepsilon X(z)}{(\kappa+1)a\pi}\int_{\gamma_0}\left(\cot\frac{t-z}{a} - \tan\frac{z}{a}\right)\frac{\mathrm{d}t}{X^+(t)},$$

其中积分即(2.103)式下面定义的 $I(z)$. 于是，由(2.104)式，有(这时 $A=0$)

$$\int_{\gamma_0}\left(\cot\frac{t-z}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)\frac{\mathrm{d}t}{X^+(t)}=a\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{X(z)}-\sec\frac{l}{a}\tan\frac{z}{a}\right).$$

因而上式 $\Phi(z)$ 中的第一项成为

$$\frac{2\mu\varepsilon}{\kappa+1}\left[\mathrm{i}-\frac{\mathrm{i}\tan\frac{z}{a}X(z)}{\cos\frac{l}{a}}\right]=\frac{2\mu\varepsilon}{\kappa+1}\left[\mathrm{i}-\frac{\tan\frac{z}{a}}{\cos\frac{l}{a}\sqrt{R(z)}}\right].$$

代入 $\Phi(z)$ 中，可以得到：

$$\Phi(z)=\frac{2\mu\varepsilon}{\kappa+1}\left[\mathrm{i}-\frac{\sin\frac{z}{a}}{\sqrt{\sin\frac{l+z}{a}\sin\frac{l-z}{a}}}\right]$$

$$+\frac{P_0}{2a\pi}\left[\frac{\cos\frac{z}{a}}{\sqrt{\sin\frac{l+z}{a}\sin\frac{l-z}{a}}}+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right].$$

为了计算在压头正下方边界上的压力分布，可以应用(2.120)式，但直接用上式更为方便.

事实上，设 $-l<t<l$，则有

$$P(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$$

$$=-\frac{4\mu\varepsilon}{\kappa+1}\frac{\sin\frac{t}{a}}{\sqrt{\sin\frac{l+t}{a}\sin\frac{l-t}{a}}}+\frac{P_0}{a\pi}\frac{\cos\frac{t}{a}}{\sqrt{\sin\frac{l+t}{a}\sin\frac{l-t}{a}}}.$$

如要求在物理上可能，即 $P(t)\geqslant 0$，只须 P_0 满足下一条件即可：

$$P_0\geqslant\frac{4\mu a\pi\varepsilon}{\kappa+1}\tan\frac{l}{a}.$$

例 2.10　周期压头有圆基底.

设压头有半径为 r 的圆基底，且 r 甚大. 现将基底曲线近似地取作

$$f(t)=\frac{a^2}{2r}\tan^2\frac{t}{a},\quad -l\leqslant t\leqslant l$$

(此曲线在 $t=0$ 处的曲率半径为 r)，于是

$$f'(t)=\frac{a}{r}\tan\frac{t}{a}\sec^2\frac{t}{a}.$$

代入(2.119)，并注意对称性. 可得

$$\Phi(z)=\frac{2\mu}{(\kappa+1)\pi r\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}\sqrt{R(t)}\tan\frac{t}{a}\sec^2\frac{t}{a}\cot\frac{t-z}{a}\mathrm{d}t$$
$$+\frac{P_0}{2a\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{R(z)}\cos\frac{l}{a}}+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right].$$

为了算出右端中的积分，记作 $J(z)$，作类似于前节例 2.7 中的代换，可以得到

$$J(z)=a\int_{-L}^{L}u\sqrt{L^2-u^2}\,\frac{1+\zeta u}{u-\zeta}\mathrm{d}u$$
$$=a(1+\zeta^2)\int_{-L}^{L}\frac{u\sqrt{L^2-u^2}}{u-\zeta}\mathrm{d}u;$$

然后再利用那里所用的方法，最后可算出

$$J(z)=\frac{a\pi}{\cos^2\frac{z}{a}}\left(\mathrm{i}\tan\frac{z}{a}\sqrt{R(z)}+\frac{1}{2}\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z}{a}\right).$$

代入前式，化简后得

$$\Phi(z)=\frac{\mu a}{(\kappa+1)r\cos^2\frac{z}{a}}\left[2\mathrm{i}\tan\frac{z}{a}+\frac{\tan^2\frac{l}{a}-2\tan^2\frac{z}{a}}{\sqrt{\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z}{a}}}\right]$$
$$+\frac{P_0}{2a\pi}\left[\frac{1}{\cos\frac{l}{a}\sqrt{\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z}{a}}}+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right].$$

当 $-l<t<l$ 时，压头正下方压力分布为

$$P(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$$
$$=\frac{2\mu a\left(\tan^2\frac{l}{a}-2\tan^2\frac{t}{a}\right)}{(\kappa+1)r\cos^2\frac{t}{a}\sqrt{\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{t}{a}}}$$
$$+\frac{P_0}{a\pi\cos\frac{l}{a}\sqrt{\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{t}{a}}}.$$

欲 $P(t)\geqslant 0$，只须

$$P_0\geqslant\frac{2\mu a^2\pi\sin^2\frac{l}{a}}{(\kappa+1)r\cos^2\frac{l}{a}}.$$

当r充分大时，这是一定可以做到的. 如给定$P_0>0$，把上式改为等式，可以证明对于l，在$\left(0,\frac{1}{2}a\pi\right)$中有唯一解，这就是相应于每一周期压头和弹性半平面接触的线段的半长.

在以上三例中，令$a\to+\infty$时，可以得到与 Мусхелишвили [1] 中一致的非周期情况的结果.

2.4.2 摩擦存在时的情况

现设周期压头与弹性半平面间摩擦系数$k\neq 0$. 即设在压头正下方，剪切力$T(t)=\tau_{xy}(t)$和正压力$P(t)=-\sigma_y(t)$间有下列关系：

$$T(t)=kP(t),\quad k>0,\ t\in\gamma_0. \tag{2.123}$$

此外，仍设已知$v^-(t)=f(t)$，$f'(t)\in H$，其中$t\in\gamma_0$；又在γ_0上，已知外压力合力为P_0，因而外应力主矢量$X+\mathrm{i}Y=T_0-\mathrm{i}P_0=(k-\mathrm{i})P_0$. 在$L_0-\gamma_0$上，$T(t)=P(t)=0$.

由(2.42)和(2.43)式，容易得到，当$t\in\gamma_0$时，

$$\begin{aligned}&(1-\mathrm{i}k)\Phi^+(t)+(1+\mathrm{i}k)\overline{\Phi}^+(t)\\&=(1-\mathrm{i}k)\Phi^-(t)+(1+\mathrm{i}k)\overline{\Phi}^-(t),\end{aligned} \tag{2.124}$$

$$\kappa\Phi^-(t)+\Phi^+(t)-\kappa\overline{\Phi}^+(t)-\overline{\Phi}^-(t)=4\mathrm{i}\mu f'(t); \tag{2.125}$$

且当t不在γ_0及其周期性相应部分上时，有

$$\Phi^+(t)=\Phi^-(t).$$

由(2.124)式，可以得到

$$(1-\mathrm{i}k)\Phi(z)+(1+\mathrm{i}k)\overline{\Phi}(z)=2\beta_2, \tag{2.126}$$

其中β_2为一常数. 如取$t\in L_0-\gamma_0$，则因$\Phi^+(t)=\Phi^-(t)=\Phi(t)$，所以，有

$$\overline{\Phi}(t)=\overline{\Phi(\overline{t})}=\overline{\Phi(t)}.$$

这样，可以知道β_2为实数.

应用(2.126)式化简(2.125)式，消去$\overline{\Phi}(z)$，这样，得到周期 Riemann 边值问题

$$\begin{aligned}&\frac{(\kappa+1)-\mathrm{i}k(\kappa-1)}{1+\mathrm{i}k}\Phi^+(t)+\frac{(\kappa+1)+\mathrm{i}k(\kappa-1)}{1+\mathrm{i}k}\Phi^-(t)\\&=4\mathrm{i}\mu f'(t)+\frac{2(\kappa+1)\beta_2}{1+\mathrm{i}k},\end{aligned}$$

或即

$$\Phi^+(t)=K\Phi^-(t)+f_0'(t)+\frac{2(\kappa+1)}{(\kappa+1)-\mathrm{i}k(\kappa-1)}\beta_2, \tag{2.127}$$

其中

$$K = -\frac{(\kappa+1)+\mathrm{i}k(\kappa-1)}{(\kappa+1)-\mathrm{i}k(\kappa-1)}, \tag{2.128}$$

$$f_0'(t) = \frac{4\mu\mathrm{i}(1+\mathrm{i}k)}{(\kappa+1)-\mathrm{i}k(\kappa-1)}f'(t). \tag{2.129}$$

若令

$$\tan\pi\alpha = k\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \quad (\text{且取 } \alpha \text{ 为最小正数}), \tag{2.130}$$

则由于

$$\kappa+1\pm\mathrm{i}k(\kappa-1) = \frac{(\kappa+1)\mathrm{e}^{\pm\pi\alpha\mathrm{i}}}{\cos\pi\alpha}, \tag{2.131}$$

于是，(2.128) 和(2.129) 式可分别改写为

$$K = -\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}, \tag{2.128$'$}$$

$$f_0'(t) = \frac{4\mu\mathrm{i}(1+\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\pi\alpha\mathrm{i}}\cos\pi\alpha}{\kappa+1}f'(t), \tag{2.129$'$}$$

而边值问题(2.127) 式可改写为

$$\Phi^+(t) = -\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}\Phi^-(t) + f_0'(t) + 2\beta_2\mathrm{e}^{\pi\alpha\mathrm{i}}\cos\pi\alpha. \tag{2.127$'$}$$

注意，因为 $k>0$，$\kappa>1$，故

$$0<\alpha<\frac{1}{2}. \tag{2.132}$$

现在

$$\frac{\log K}{2\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}+\alpha,$$

且这里要求(2.127)$'$ 在 h_0 类中的解. 所以，类似于第一章 2.2 节中特例的讨论，易见问题在 h_0 类的指标为 1，且其典则函数为

$$X(z) = \left(\tan\frac{z}{a}+\tan\frac{l}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-\alpha}\left(\tan\frac{z}{a}-\tan\frac{l}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+\alpha}. \tag{2.133}$$

它在用 γ 剖开的 z 平面中全纯，且其右端函数不妨取这样的一支，使

$$\lim_{z\to\pm\frac{1}{2}a\pi}\tan\frac{z}{a}X(z) = 1. \tag{2.134}$$

和前一段讨论相似，可以得到问题(2.127)$'$ 在 h_0 类中的一般解答为

$$\Phi(z) = \frac{2\mu(1+\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\pi\alpha\mathrm{i}}\cos\pi\alpha\, X(z)}{a\pi(\kappa+1)}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t$$

$$+X(z)(1+\mathrm{i}k)\mathrm{i}\left(\beta_0\tan\frac{z}{a}+\beta_1\right)+\beta_2, \tag{2.135}$$

其中 β_0, β_1 为两任意常数.

下面证明，β_0, β_1 必须取为实数，方能适合条件(2.126)式.

首先，我们注意到：因为 $X(z)$ 当 $z \in L_0 - \gamma_0$ 时取实值，因此，$X(\overline{z}) = \overline{X(z)}$，即 $\overline{X}(z) = X(z)$；又当 $t \in \gamma_0$ 时，

$$\overline{X^+(t)} = \overline{X}^-(t) = X^-(t) = \frac{1}{K}X^+(t) = -e^{-2\pi\alpha i}X^+(t),$$

因此，

$$\frac{\Phi(z)}{1+ik} = \frac{2\mu e^{\pi\alpha i}\cos\pi\alpha\, X(z)}{a\pi(\kappa+1)}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,dt + X(z)\left(\beta_0\tan\frac{z}{a}+\beta_1\right)i + \frac{\beta_2}{1+ik},$$

而

$$\frac{\overline{\Phi}(z)}{1-ik} = \overline{\left(\frac{\Phi(\overline{z})}{1+ik}\right)} = -\frac{2\mu e^{\pi\alpha i}\cos\pi\alpha\, X(z)}{a\pi(\kappa+1)}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,dt - X(z)\left(\overline{\beta_0}\tan\frac{z}{a}+\overline{\beta_1}\right)i + \frac{\beta_2}{1-ik}.$$

为使(2.126)式成立，即

$$\frac{\Phi(z)}{1+ik} + \frac{\overline{\Phi}(z)}{1-ik} = \frac{2\beta_2}{1+k^2},$$

必须要求 β_0, β_1 为实数.

和上段一样，下面将利用位移周期性和 $z=-\infty i$ 处应力平衡条件来决定 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$.

为此，请注意图 2.8（并和图 2.5 对照)，其中已令

$$\zeta = \tan\frac{z}{a}, \quad L = \tan\frac{l}{a},$$

$$\theta = \arctan\frac{1}{L} = \frac{\pi}{2} - \frac{l}{a}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

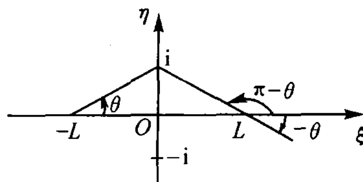


图 2.8

易见

$$X(+\infty i) = X_*(i) = \cos\frac{l}{a}\, e^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\theta i} e^{\left(-\frac{1}{2}+\alpha\right)(\pi-\theta)i}$$

$$= -i\cos\frac{l}{a}\, e^{\alpha\pi i}e^{-2\alpha\theta i} = -i\cos\frac{l}{a}\, e^{\frac{2l\alpha}{a}i}, \qquad (2.136)$$

同理，

$$X(-\infty \mathrm{i}) = \mathrm{i}\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}. \tag{2.137}$$

于是，如令 $\Lambda_{\pm}$ 仍同前段意义，则有

$$\int_{\Lambda_{\pm}} X(z)\mathrm{d}z = a\pi X(\pm\infty \mathrm{i}) = \mp a\pi \mathrm{i}\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}},$$

$$\int_{\Lambda_{\pm}} X(z)\tan\frac{z}{a}\,\mathrm{d}z = \int_{\Lambda_{\pm}} X(z)\cos\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}z = \pm a\pi \mathrm{i}X(\pm\infty \mathrm{i})$$
$$= a\pi\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}.$$

当 z 在下半平面 S^- 时，由(2.135)式知

$$\varphi(z+a\pi)-\varphi(z) = \int_{\Lambda_-}\Phi(z)\mathrm{d}z$$
$$= \frac{2\mu(1+\mathrm{i}k)\cos\pi\alpha\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\left(\pi-\frac{2l}{a}\right)\alpha \mathrm{i}}}{\kappa+1}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t$$
$$+a\pi(1+\mathrm{i}k)\cos\frac{l}{a}\,(\mathrm{i}\beta_0-\beta_1)\mathrm{e}^{-\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}+a\pi\beta_2,$$

$$\varphi(\bar{z}+a\pi)-\varphi(\bar{z}) = \int_{\Lambda_+}\Phi(z)\mathrm{d}z$$
$$= \frac{2\mu(1+\mathrm{i}k)\cos\pi\alpha\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\left(\pi+\frac{2l}{a}\right)\alpha \mathrm{i}}}{\kappa+1}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t$$
$$+a\pi(1+\mathrm{i}k)\cos\frac{l}{a}\,(\mathrm{i}\beta_0+\beta_1)\mathrm{e}^{\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}+a\pi\beta_2.$$

于是位移周期性条件成为

$$\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}+\kappa \mathrm{e}^{\frac{-2l\alpha}{a}\mathrm{i}}\right)\beta_0+\left(\mathrm{e}^{\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}-\kappa \mathrm{e}^{\frac{-2l\alpha}{a}\mathrm{i}}\right)\beta_1+\frac{(\kappa+1)\beta_2}{(1+\mathrm{i}k)\cos\frac{l}{a}}$$
$$= -\frac{2\mu\cos\pi\alpha}{(\kappa+1)a\pi}\left[\mathrm{e}^{\left(\pi+\frac{2l}{a}\right)\alpha \mathrm{i}}+\kappa \mathrm{e}^{\left(\pi-\frac{2l}{a}\right)\alpha \mathrm{i}}\right]\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t. \tag{2.138}$$

其次，考虑在 $z=-\infty \mathrm{i}$ 处应力平衡条件. 因为由(2.136)与(2.137)式，易见

$$\Phi(-\infty \mathrm{i}) = \frac{2\mu(1+\mathrm{i}k)\cos\pi\alpha\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\left(\pi-\frac{2l}{a}\right)\alpha \mathrm{i}}}{a\pi(\kappa+1)}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t$$
$$+(1+\mathrm{i}k)\cos\frac{l}{a}\,(\mathrm{i}\beta_0-\beta_1)\mathrm{e}^{-\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}+\beta_2,$$

$$\Phi(+\infty\mathrm{i})=\frac{2\mu(1+\mathrm{i}k)\cos\pi\alpha\cos\frac{l}{a}\mathrm{e}^{\left(\pi+\frac{2l}{a}\right)\alpha\mathrm{i}}}{a\pi(\kappa+1)}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t$$
$$+(1+\mathrm{i}k)\cos\frac{l}{a}(\mathrm{i}\beta_0+\beta_1)\mathrm{e}^{\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}+\beta_2.$$

注意到此时(2.112)式仍成立，因而有

$$\Phi(-\infty\mathrm{i})-\Phi(+\infty\mathrm{i})=\sigma_y(-\infty\mathrm{i})-\mathrm{i}\tau_{xy}(-\infty\mathrm{i})=-\frac{(1+\mathrm{i}k)P_0}{a\pi}.$$

将上式代入，便有

$$-\frac{P_0}{a\pi}=\frac{2\mu\cos\pi\alpha\cos\frac{l}{a}}{a\pi(\kappa+1)}\left[\mathrm{e}^{\left(\pi-\frac{2l}{a}\right)\alpha\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{\left(\pi+\frac{2l}{a}\right)\alpha\mathrm{i}}\right]\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t$$
$$+\cos\frac{l}{a}\left[\mathrm{i}\beta_0\left(\mathrm{e}^{-\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}\right)-\beta_1\left(\mathrm{e}^{-\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}+\mathrm{e}^{\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{i}}\right)\right],$$

亦即

$$\beta_0\sin\frac{2l\alpha}{a}-\beta_1\cos\frac{2l\alpha}{a}=-\frac{2\mu\cos\pi\alpha\sin\frac{2l\alpha}{a}\mathrm{e}^{\pi\alpha\mathrm{i}}}{a\pi\mathrm{i}(\kappa+1)}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t$$
$$-\frac{P_0}{2a\pi\cos\frac{l}{a}}.\tag{2.139}$$

置

$$Q(z)=\left(\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha},\tag{2.140}$$

并取定当z由剖开的上半平面趋于$t\in\gamma_0$时，$Q^+(t)=Q(t)$取正值的那一支，于是，由于

$$\arg X^+(t)=\left(-\frac{1}{2}+\alpha\right)\pi,\quad t\in\gamma_0,$$

所以

$$X(z)=-\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}}{Q(z)},\quad X^+(t)=-\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}}{Q(t)},\ t\in\gamma_0,$$

且$Q(t)$为正值. 因此，$\Phi(z)$的表达式(2.135)可改写为

$$\Phi(z)=\frac{2\mu(1+\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\pi\alpha\mathrm{i}}\cos\pi\alpha}{a\pi(\kappa+1)Q(z)}\int_{\gamma_0}f'(t)Q(t)\cot\frac{t-z}{\alpha}\mathrm{d}t$$
$$+\frac{(1+\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\pi\alpha\mathrm{i}}}{Q(z)}\left(\beta_0\tan\frac{z}{\alpha}+\beta_1\right)+\beta_2.\tag{2.135$'$}$$

这样，β_0,β_1,β_2由(2.138),(2.139)两式或即下列二方程决定：

$$i\left(e^{\frac{2l\alpha}{a}i}+\kappa e^{-\frac{2l\alpha}{a}i}\right)\beta_0+\left(e^{\frac{2l\alpha}{a}i}-\kappa e^{\frac{2l\alpha}{a}i}\right)\beta_1+\frac{\kappa+1}{(1+ik)\cos\frac{l}{a}}\beta_2$$

$$=\frac{2\mu\cos\pi\alpha}{(\kappa+1)a\pi i}\left(e^{\frac{2l\alpha}{a}i}+\kappa e^{-\frac{2l\alpha}{a}i}\right)\int_{\gamma_0}f'(t)Q(t)\mathrm{d}t, \tag{2.138$'$}$$

$$\beta_0\sin\frac{2l\alpha}{a}-\beta_1\cos\frac{2l\alpha}{a}$$

$$=-\frac{2\mu\cos\pi\alpha\sin\frac{2l\alpha}{a}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{\gamma_0}f'(t)Q(t)\mathrm{d}t-\frac{P_0}{2a\pi\cos\frac{l}{a}}. \tag{2.139$'$}$$

现将(2.138)$'$的实部与虚部分开，可以得到下列二方程：

$$\beta_0\cos\frac{2l\alpha}{a}+\beta_1\sin\frac{2l\alpha}{a}-\frac{k}{k^2+1}\frac{\beta_2}{\cos\frac{l}{a}}$$

$$=-\frac{2\mu\cos\pi\alpha\cos\frac{2l\alpha}{a}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{\gamma_0}f'(t)Q(t)\mathrm{d}t, \tag{2.141}$$

$$\beta_0\sin\frac{2l\alpha}{a}-\beta_1\cos\frac{2l\alpha}{a}+\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{\beta_2}{(k^2+1)\cos\frac{l}{a}}$$

$$=-\frac{2\mu\cos\pi\alpha\sin\frac{2l\alpha}{a}}{(\kappa+1)a\pi}\int_{\gamma_0}f'(t)Q(t)\mathrm{d}t. \tag{2.142}$$

将(2.142)和(2.139)$'$两式相比较，便可得到

$$\beta_2=\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{(k^2+1)P_0}{2a\pi}. \tag{2.143}$$

把它代入(2.141)式，然后和(2.139)$'$式联立，即可算出 β_0,β_1 分别为

$$\beta_0=-\frac{2\mu\cos\pi\alpha}{(\kappa+1)a\pi}\int_{\gamma_0}f'(t)Q(t)\mathrm{d}t+\frac{P_0\sin(1-\lambda)\pi\alpha}{2a\pi\cos\pi\alpha\cos\frac{l}{a}}, \tag{2.144}$$

$$\beta_1=\frac{P_0\cos(1-\lambda)\pi\alpha}{2a\pi\cos\pi\alpha\cos\frac{l}{a}}. \tag{2.145}$$

这里已将 γ_0 对一个周期 L_0 的长度之比仍记为 λ：

$$\lambda=\frac{2l}{a\pi}\quad(0<\lambda<1). \tag{2.146}$$

我们将(2.143),(2.144)与(2.145)代入(2.135)$'$式，可以求得 $\Phi(z)$ 的最后

表达式.

这样，我们能计算压头正下方的压力分布. 因为此时可有

$$P(t_0)+\mathrm{i}T(t_0)=(1+\mathrm{i}k)P(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0),$$

利用推广的 Plemelj 公式，并注意到

$$Q^-(t)=-Q(t)\mathrm{e}^{2\alpha\pi\mathrm{i}},\quad t\in\gamma_0, \tag{2.147}$$

可以得到

$$P(t_0)=-\frac{2\mu\sin 2\pi\alpha}{\kappa+1}f'(t_0)+\frac{4\mu\cos^2\pi\alpha}{a\pi(\kappa+1)Q(t_0)}\int_{-l}^{l}f'(t)Q(t)\cot\frac{t-t_0}{a}\,\mathrm{d}t$$
$$+\frac{2\cos\pi\alpha}{Q(t_0)}\left(\beta_0\tan\frac{t_0}{a}+\beta_1\right),\quad t_0\in\gamma_0, \tag{2.148}$$

其中 β_0,β_1 仍分别由(2.144),(2.145) 式给出.

当 $k=0$ (随之 $\alpha=0$) 时，便可得到上一段中曾讨论过的无摩擦存在情况的结果. 另一方面，若使 $a\to+\infty$，便可得到 Мусхелишвили [1] 中所论非周期情况的结果.

例 2.11　周期压头有直水平基底.

这时 $f'(t)=0$.

于是，由(2.135) 和(2.143) ～ (2.145) 诸式，可以推出：

$$\Phi(z)=\frac{P_0(1+\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}\cos\left(\dfrac{z}{a}-(1-\lambda)\pi\alpha\right)}{2a\pi\cos\pi\alpha\sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\dfrac{l+z}{a}\sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\dfrac{l-z}{a}}$$
$$+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\frac{(k^2+1)P_0}{2a\pi}, \tag{2.149}$$

其中 $\sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\dfrac{l+z}{a}$ 与 $\sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\dfrac{l-z}{a}$ 已取定这样一支：当 z 在上半平面 S^+ 趋于 γ_0 上的点时，它取正值；而 λ 仍以(2.146) 式给出.

又由(2.148) 式，可以得到在压头正下方的边界上的压力分布为

$$P(t)=\frac{P_0\cos\left(\dfrac{t}{a}-(1-\lambda)\pi\alpha\right)}{a\pi\sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\dfrac{l+t}{a}\sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\dfrac{l-t}{a}},\quad t\in\gamma_0. \tag{2.150}$$

若令 $k=0$ (因而 $\alpha=0$) 时，便得到例 2.8 所论无摩擦存在情况的结果.

例 2.12　周期压头有直倾斜基底.

仍设倾角为 ε (图 2.7). 这时 $f'(t)=\varepsilon$. 代入(2.135)′，并注意到(2.143) ～(2.145) 诸式，可以得到

$$\Phi(z)=\frac{2\mu\varepsilon(1+\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}\cos\pi\alpha}{a\pi(\kappa+1)Q(z)}\int_{\gamma_0}Q(t)\left(\cot\frac{t-z}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}t$$
$$+\Phi_1(z), \tag{2.151}$$

其中 $\Phi_1(z)$ 即例 2.11 中的 $\Phi(z)$.

现在来计算包含在上式中的积分

$$I(z)=\int_{\gamma_0}Q(t)\left(\cot\frac{t-z}{a}-\tan\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}t.$$

仍和以前一样，令 $u=\tan\dfrac{t}{a}$，$\zeta=\tan\dfrac{z}{a}$，$L=\tan\dfrac{l}{a}$. 于是，易于推出

$$I(z)=a\sec^2\frac{z}{a}J(\zeta),$$

其中

$$J(\zeta)=\int_{-L}^{L}\frac{(L+u)^{\frac{1}{2}+\alpha}(L-u)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{(1+u^2)(u-\zeta)}\mathrm{d}u.$$

置

$$\Omega(\zeta)=\int_{\Lambda}\frac{(L+w)^{\frac{1}{2}+\alpha}(L-w)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{(1+w^2)(w-\zeta)}\mathrm{d}w,$$

其中 Λ 仍为 w 平面上围住线段 $[-L,L]$ 的闭路，但不围住 ζ 者，并沿时针方向积分. 注意到(2.147)式，可以推出

$$\Omega(\zeta)=(1+\mathrm{e}^{2\alpha\pi\mathrm{i}})J(\zeta),$$

因而只需要计算 $\Omega(\zeta)$.

注意到在 $w=\infty$ 处，上面 $\Omega(\zeta)$ 的表达式右端被积式有二重零点；而在 $W=\mathrm{i}$ 处(参看图 2.8)，

$$\begin{aligned}(L+\mathrm{i})^{\frac{1}{2}+\alpha}(L-\mathrm{i})^{\frac{1}{2}-\alpha}&=|L+\mathrm{i}|^{\frac{1}{2}+\alpha}|L-\mathrm{i}|^{\frac{1}{2}-\alpha}\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\theta\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}+\alpha\right)\theta\mathrm{i}}\\&=\sec\frac{l}{a}\mathrm{e}^{2\alpha\theta\mathrm{i}}=\sec\frac{l}{a}\mathrm{e}^{2\alpha\left(\frac{\pi}{2}-\frac{l}{a}\right)\mathrm{i}}\\&=\sec\frac{l}{a}\mathrm{e}^{(1-\lambda)\alpha\pi\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

在 $w=-\mathrm{i}$ 处，

$$\begin{aligned}(L-\mathrm{i})^{\frac{1}{2}+\alpha}(L+\mathrm{i})^{\frac{1}{2}-\alpha}&=\sec\frac{l}{a}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\theta\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(-2\pi+\theta)\mathrm{i}}\\&=-\sec\frac{l}{a}\mathrm{e}^{2\pi\alpha\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\alpha\theta\mathrm{i}}=-\sec\frac{l}{a}\mathrm{e}^{(1+\lambda)\alpha\pi\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

于是，由熟知的公式，可以推出：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Omega(\zeta)=\frac{(L+\zeta)^{\frac{1}{2}+\alpha}(L-\zeta)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{1+\zeta^2}-\frac{\mathrm{e}^{(1-\lambda)\alpha\pi\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}(\zeta-\mathrm{i})\cos\frac{l}{a}}-\frac{\mathrm{e}^{(1+\lambda)\alpha\pi\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}(\zeta+\mathrm{i})\cos\frac{l}{a}},$$

因此，我们得到

$$\Omega(\zeta)=\frac{2\pi\mathrm{i}(L+\zeta)^{\frac{1}{2}+\alpha}(L-\zeta)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{1+\zeta^2}-\frac{2\pi\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}(\zeta\cos\lambda\alpha\pi+\sin\lambda\alpha\pi)}{(1+\zeta^2)\cos\frac{l}{a}}.$$

因为

$$I(z)=\frac{a}{\cos^2\frac{z}{a}}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\alpha\pi\mathrm{i}}}\Omega(\zeta)=\frac{a\mathrm{e}^{-\alpha\pi\mathrm{i}}}{2\cos^2\frac{z}{a}\cos\alpha\pi}\Omega(\zeta),$$

所以，最后推出，

$$I(z)=\frac{a\pi\mathrm{i}Q(z)}{\cos\pi\alpha\ \mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}}-\frac{a\pi\sin\left(\frac{z}{a}+\lambda\alpha\pi\right)}{\cos\pi\alpha\cos\frac{l}{a}\cos\frac{z}{a}}.$$

将它代入(2.151)，得到

$$\Phi(z)=\frac{2\mu\varepsilon\mathrm{i}(1+\mathrm{i}\kappa)}{\kappa+1}-\frac{2\mu\varepsilon(1+\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{\alpha\pi\mathrm{i}}\sin\left(\frac{z}{a}+\lambda\alpha\pi\right)}{(\kappa+1)\sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{l+z}{a}\sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{l-z}{a}}+\Phi_1(z),\tag{2.152}$$

其中 $\Phi_1(z)$ 由(2.149)式右端给出.

现在来计算压头正下方的压力分布.

这里不应用(2.149)，而可以更快地直接计算. 由于

$$P(t)=\frac{\Phi^+(t)-\Phi^-(t)}{1+\mathrm{i}\kappa},$$

并仍注意到(2.147)式，可以立刻推出 $P(t)$ 的表达式：

$$P(t)=-\frac{4\mu\varepsilon\cos\pi\alpha\sin\left(\frac{t}{a}+\lambda\alpha\pi\right)}{(\kappa+1)\sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{l+t}{a}\sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{l-t}{a}}+P_1(t),$$

其中 $P_1(t)$ 由(2.150)式的右端给出.

这样，最后得到

$$P(t)=\frac{P_0\cos\left(\dfrac{t}{a}-(1-\lambda)\alpha\pi\right)}{a\pi\sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\dfrac{l+t}{a}\sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\dfrac{l-t}{a}}$$

$$-\frac{4\mu\varepsilon\cos\alpha\pi\sin\left(\dfrac{t}{a}+\lambda\alpha\pi\right)}{(\kappa+1)\sin^{\frac{1}{2}+\alpha}\dfrac{l+t}{a}\sin^{\frac{1}{2}-\alpha}\dfrac{l-t}{a}},\quad t\in\gamma_0.\qquad(2.153)$$

显然，当 ε 充分小，例如当

$$\varepsilon\leqslant\frac{P_0(\kappa+1)\cos\left(\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)\lambda\pi-\alpha\pi\right)}{4\mu a\pi\cos\alpha\pi\sin\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right)\lambda\pi}$$

时，可以保证 $P(t)\geqslant 0$，即物理上可能.

如在(2.152),(2.153) 式中令 $k=0$，则可得到例 2.9 中无摩擦存在情况的结果；又如令 $a\to\infty$，则得到 Н. И. Мусхелишвили [1] 中关于非周期情况的结果.

注 1　运用 Н. И. Мусхелишвили 以及本节类似的方法，可求解更一般的各向同性周期弹性接触的平面问题(例如，接触线不必为直线段)，这里就不详加讨论了.

注 2　以上所论，都假定一个周期内只有一个压头，但显然都可推广到有几个压头的情形，原则上不会有困难.

第三章

各向异性平面弹性理论的周期问题

本章将讨论各向异性平面弹性理论的周期问题.

首先，在应力、位移是周期的，且应力在无穷远处有界(但位移却不一定)的条件下，讨论各向异性平面弹性理论周期问题中的应力函数的周期性.然后，直接应用Hilbert核积分公式，讨论各向异性弹性半平面的周期基本问题. 最后，讨论各向异性平面弹性理论的周期接触问题，其中引入两个由Hilbert 核积分表示的函数，将其化为关于半平面的周期 Riemann-Hilbert 边值问题.

3.1 各向异性平面弹性周期问题中的应力函数

3.1.1 基本假定

在本章中讨论的各向异性平面弹性周期问题，都是在下列假定下进行讨论的.

假设应力、位移都是以 $a\pi$ 为周期的，而应力还是有界的(位移却不一定). 并且假设所论及的边界条件都是以 $a\pi$ 为周期的.

这样，我们只需要对弹性体的一个周期部分进行讨论.

对于本章所涉及的周期问题，大多是设弹性体占有 $z = x + \mathrm{i}y$ 平面的下半平面 S^-. 此时，$z = -\infty\mathrm{i}$ 处存在应力 $\sigma_x(-\infty\mathrm{i}), \sigma_y(-\infty\mathrm{i}), \tau_{xy}(-\infty\mathrm{i})$. 而在$z = -\infty\mathrm{i}$ 处的应力，应理解为当 $z \to -\infty\mathrm{i}$ (即 x 为任意的，$y \to -\infty$) 时的极限，根据基本假定，这些极限是有限的. 假设在边界的一个周期的线段上，已知外应力主矢量为 $X + \mathrm{i}Y$，根据平衡条件，则有

$$\sigma_y(-\infty\mathrm{i}) = \frac{Y}{a\pi}, \quad \tau_{xy}(-\infty\mathrm{i}) = \frac{X}{a\pi}. \tag{3.1}$$

3.1.2 各向异性弹性平面周期问题中应力函数的周期性

对于各向异性弹性体，应力分量σ_x,σ_y及τ_{xy}，位移分量u及v（不计刚性位移）可用$\varphi(z_1),\psi(z_2)$及其导数应力函数$\Phi(z_1)=\varphi'(z_1)$，$\Psi(z_2)=\psi'(z_2)$表示为

$$\sigma_x = \mu_1^2\Phi(z_1)+\overline{\mu_1^2}\,\overline{\Phi(z_1)}+\mu_2^2\Psi(z_2)+\overline{\mu_2}^2\,\overline{\Psi(z_2)}, \tag{3.2}$$

$$\sigma_y = \Phi(z_1)+\overline{\Phi(z_1)}+\Psi(z_2)+\overline{\Psi(z_2)}, \tag{3.3}$$

$$\tau_{xy} = -(\mu_1\Phi(z_1)+\overline{\mu_1}\,\overline{\Phi(z_1)}+\mu_2\Psi(z_2)+\overline{\mu_2}\,\overline{\Psi(z_2)}), \tag{3.4}$$

$$u = p_1\varphi(z_1)+\overline{p_1}\,\overline{\varphi(z_1)}+p_2\psi(z_2)+\overline{p_2}\,\overline{\psi(z_2)}, \tag{3.5}$$

$$v = q_1\varphi(z_1)+\overline{q_1}\,\overline{\varphi(z_1)}+q_2\psi(z_2)+\overline{q_2}\,\overline{\psi(z_2)}, \tag{3.6}$$

其中$\Phi(z_1)$为z_1的全纯函数，而$\Psi(z_2)$为z_2的全纯函数，且

$$z_1 = x+\mu_1 y,\quad z_2 = x+\mu_2 y,$$

以及

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \beta_{11}\mu_1^2+\beta_{12}-\beta_{16}\mu_1,\\
p_2 &= \beta_{11}\mu_2^2+\beta_{12}-\beta_{16}\mu_2,\\
q_1 &= \frac{\beta_{12}\mu_1^2+\beta_{22}-\beta_{26}\mu_1}{\mu_1},\\
q_2 &= \frac{\beta_{12}\mu_2^2+\beta_{22}-\beta_{26}\mu_2}{\mu_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

而$\mu_1,\overline{\mu_1},\mu_2,\overline{\mu_2}$为下列方程的(假设为各不相等的)两对共轭根：

$$\beta_{11}s^4-2\beta_{16}s^3+(2\beta_{12}+\beta_{66})s^2-2\beta_{26}s+\beta_{22}=0,$$

其中

$$\begin{matrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16}\\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26}\\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66}\end{matrix}$$

为各向异性体的弹性系数(见 Савин [1]).

不妨设$\operatorname{Im}\mu_j>0\ (j=1,2)$. 因此当$z$在下(或上)半平面时，$z_1,z_2$也是如此.

引理 3.1 *在基本假定下，则应力函数$\Phi(z_1),\Psi(z_2)$是以$a\pi$为周期的函数.*

证 事实上，将(3.5)与(3.6)式均对x求导数，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p_1\Phi(z_1) + \overline{p_1}\,\overline{\Phi(z_1)} + p_2\Psi(z_2) + \overline{p_2}\,\overline{\Psi(z_2)}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = q_1\Phi(z_1) + \overline{q_1}\,\overline{\Phi(z_1)} + q_2\Psi(z_2) + \overline{q_2}\,\overline{\Psi(z_2)}. \tag{3.8}$$

根据位移周期性假定(即使位移为准周期的)，可以推出$\frac{\partial u}{\partial x}$与$\frac{\partial v}{\partial x}$是以$a\pi$为周期的.

将(3.2),(3.3),(3.7)与(3.8)四式联立，由于行列式

$$\begin{vmatrix} \mu_1^2 & \overline{\mu_1}^2 & \mu_2^2 & \overline{\mu_2}^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ p_1 & \overline{p_1} & p_2 & \overline{p_2} \\ q_1 & \overline{q_1} & q_2 & \overline{q_2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此，可以将$\Phi(z_1)$与$\Psi(z_2)$唯一解出，用$\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$,$\sigma_x$与$\sigma_y$表示. 这样，由后者的周期性可以推出前者的周期性.

需要指出，一般，$\varphi(z_1)$和$\psi(z_2)$为多值的. 但若弹性体为周期单连通域(例如半平面、无限水平长条)，或者它虽然有周期性洞或裂纹，而在其一个周期的边界上外应力的合主矢量为0，则它们是单值、全纯的.

3.2　各向异性弹性半平面的周期基本问题

这里，考虑各向异性弹性半平面的第一与第二周期基本问题，它们均可直接应用 Hilbert 核积分公式求解.

3.2.1　第一基本问题

设各向异性弹性体占有z平面的下半平面S^-. 在x轴上，记$z=t$(t为实数). 设已知在x轴上的外应力分布为

$$\sigma_y(t) = -P(t), \quad \tau_{xy} = T(t). \tag{3.9}$$

它们分段地满足Hölder条件，且以$a\pi$为周期. 这里把σ_y写成$-P$，意指P为压力分布. 在基本假设成立的条件下，求整个弹性体应力(及位移)分布，称为周期第一基本问题.

定理 3.1　在上述条件下，半平面的周期第一基本问题的解存在且唯一.

我们将在证明中同时给出求解方法.

证 首先，应用(3.3),(3.4)式，作应力分量 σ_y,τ_{xy} 的线性组合 $\mu_2\sigma_y+\tau_{xy}$ 与 $\mu_1\sigma_y+\tau_{xy}$，然后，使 z_1,z_2 趋于 x 轴上的点 t. 计及条件(3.9)，可以得到

$$
\begin{aligned}
-\mu_2 P(t)+T(t) &= (\mu_2-\mu_1)\Phi(t)+(\mu_2-\overline{\mu_1})\overline{\Phi(t)} \\
&\quad +(\mu_2-\overline{\mu_1})\overline{\Psi(t)}, \\
-\mu_1 P(t)+T(t) &= (\mu_1-\overline{\mu_1})\overline{\Phi(t)}+(\mu_1-\mu_2)\Psi(t) \\
&\quad +(\mu_1-\overline{\mu_2})\overline{\Psi(t)}.
\end{aligned}
$$

将上两式左右两边分别乘以$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\cot\frac{t-z_1}{a}$与$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\cot\frac{t-z_2}{a}\mathrm{d}t$，且沿 $L_0:-\frac{a\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{a\pi}{2}$ 积分，应用关于半平面的 Hilbert 核积分公式(1.60)，(1.61)，有

$$
\Phi(z_1)=\frac{-1}{(\mu_1-\mu_2)2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(\mu_2 P(t)-T(t))\cot\frac{t-z_1}{a}\,\mathrm{d}t+\gamma_1, \tag{3.10}
$$

$$
\Psi(z_2)=\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)2a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(\mu_1 P(t)-T(t))\cot\frac{t-z_2}{a}\,\mathrm{d}t+\gamma_2, \tag{3.11}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_1-\mu_2}&[(\mu_2-\mu_1)\Phi(-\infty\mathrm{i})-(\mu_2-\overline{\mu_1})\overline{\Phi(-\infty\mathrm{i})} \\
&-(\mu_2-\overline{\mu_2})\overline{\Psi(-\infty\mathrm{i})}],
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_1-\mu_2}&[(\mu_1-\mu_2)\Psi(-\infty\mathrm{i})-(\mu_1-\overline{\mu_1})\overline{\Phi(-\infty\mathrm{i})} \\
&-(\mu_1-\overline{\mu_2})\overline{\Psi(-\infty\mathrm{i})}].
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

为了确定 γ_1,γ_2，首先，由(3.12),(3.13)式，易于推出，

$$
\mathrm{Re}\{\gamma_1+\gamma_2\}=0, \tag{3.14}
$$

$$
\mathrm{Re}\{\mu_1\gamma_1+\mu_2\gamma_2\}=0.\text{[①]} \tag{3.15}
$$

其次，下面还要利用位移周期性条件，来得到关于 γ_1,γ_2 的另外两个方程. 注意，现在 $\varphi(z_1)$ 和 $\psi(z_2)$ 为单值的.

为此，将(3.10),(3.11)两式积分，如不计及刚性平移，有

$$
\varphi(z_1)=\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)2\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}(\mu_2 P-T)\log\sin\frac{t-z_1}{a}\,\mathrm{d}t+\gamma_1 z_1,
$$

---

① (3.14),(3.15)两式也易于由 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的平衡条件推出.

$$\psi(z_2)=\frac{-1}{(\mu_1-\mu_2)2\pi i}\int_{L_0}(\mu_1 P-T)\log\sin\frac{t-z_2}{a}\,dt+\gamma_2 z_2.$$

当 $z\in S^-$ 亦即 $z_1,z_2\in S^-$ 时，有

$$\varphi(z_1+a\pi)=\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)2\pi i}\int_{L_0}(\mu_2 P-T)\left(\log\sin\frac{t-z_1}{a}+i\pi\right)dt+\gamma_1(z_1+a\pi),$$

$$\psi(z_2+a\pi)=\frac{-1}{(\mu_1-\mu_2)2\pi i}\int_{L_0}(\mu_1 P-T)\left(\log\sin\frac{t-z_2}{a}+i\pi\right)dt+\gamma_2(z_2+a\pi),$$

因此

$$\varphi(z_1+a\pi)-\varphi(z_1)=\frac{1}{2(\mu_1-\mu_2)}\int_{L_0}(\mu_2 P-T)dt+\gamma_1 a\pi,$$

$$\psi(z_2+a\pi)-\psi(z_2)=\frac{-1}{2(\mu_1-\mu_2)}\int_{L_0}(\mu_1 P-T)dt+\gamma_2 a\pi.$$

由此，利用(3.5),(3.6)式，可以计算得到 u,v 在 L_0 上的改变量分别为

$$[u]_{L_0}=\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1\mu_2-p_2\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\int_{L_0}P dt-\frac{p_1-p_2}{\mu_1-\mu_2}\int_{L_0}T dt+2a\pi(p_1\gamma_1+p_2\gamma_2)\right\},$$

$$[v]_{L_0}=\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1\mu_2-q_2\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\int_{L_0}P dt-\frac{q_1-q_2}{\mu_1-\mu_2}\int_{L_0}T dt+2a\pi(q_1\gamma_1+q_2\gamma_2)\right\}.$$

因此，由位移周期性条件 $[u]_{L_0}=0$，$[v]_{L_0}=0$，得到下列两式：

$$B_1P^*-B_2T^*+2\mathrm{Re}\{p_1\gamma_1+p_2\gamma_2\}=0, \tag{3.16}$$

$$B_3P^*-B_4T^*+2\mathrm{Re}\{q_1\gamma_1+q_2\gamma_2\}=0, \tag{3.17}$$

其中

$$P^*=\frac{1}{a\pi}\int_{L_0}P dt,\quad T^*=\frac{1}{a\pi}\int_{L_0}T dt,$$

$$\left.\begin{aligned}
B_1&=\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1\mu_2-p_2\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\right\}=\mathrm{Re}\{\beta_{11}\mu_1\mu_2-\beta_{12}\},\\
B_2&=\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1-p_2}{\mu_1-\mu_2}\right\}=\mathrm{Re}\{\beta_{11}(\mu_1+\mu_2)-\beta_{26}\},\\
B_3&=\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1\mu_2-q_2\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\right\}=\mathrm{Re}\left\{-\beta_{22}\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)+\beta_{26}\right\},\\
B_4&=\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1-q_2}{\mu_1-\mu_2}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\beta_{12}-\beta_{22}\frac{1}{\mu_1\mu_2}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{*}$$

由方程(3.14) ～ (3.17)，可以确定 γ_1,γ_2，这样，便得到应力函数 $\Phi(z_1),\Psi(z_2)$，于是，弹性体内的应力分布即可确定.

现以实际工程中常见的情况加以说明.

考虑当弹性体为正交各向异性体，且正交各向异性轴与坐标轴平行时的情况. 此时，有 $\mu_1=\mathrm{i}v_1$，$\mu_2=\mathrm{i}v_2$（v_1,v_2 为不同正实数），$\beta_{16}=\beta_{26}=0$. 这样，由(A)式与(*)式，有

$$p_1=-v_1^2\beta_{11}+\beta_{12}=G_1,\quad p_2=-v_2^2\beta_{11}+\beta_{12}=G_2,$$

$$q_1=\left(\beta_{12}v_1-\frac{\beta_{22}}{v_1}\right)\mathrm{i}=H_1\mathrm{i},\quad q_2=\left(\beta_{12}v_2-\frac{\beta_{22}}{v_2}\right)\mathrm{i}=H_2\mathrm{i},$$

$$B_1=-(\beta_{11}v_1v_2+\beta_{12}),\quad B_2=B_3=0,\quad B_4=\beta_{12}+\frac{\beta_{22}}{v_1v_2},$$

其中 G_1,G_2,H_1,H_2 均为实数.

对于这种情况，应力函数为

$$\Phi(z_1)=\frac{1}{(v_1-v_2)2a\pi}\int_{L_0}(\mathrm{i}v_2P-T)\cot\frac{t-z_1}{a}\,\mathrm{d}t+\gamma_1,$$

$$\Psi(z_2)=\frac{-1}{(v_1-v_2)2a\pi}\int_{L_0}(\mathrm{i}v_1P-T)\cot\frac{t-z_2}{a}\,\mathrm{d}t+\gamma_2.$$

此时，确定 γ_1,γ_2 的方程(3.14) ～ (3.17) 成为

$$\gamma_1^*+\gamma_2^*=0,\quad v_1\gamma_1'+v_2\gamma_2'=0,$$

$$G_1\gamma_1^*+G_2\gamma_2^*=-\frac{1}{2}B_1P^*,$$

$$H_1\gamma_1'+H_2\gamma_2'=-\frac{1}{2}B_4T^*,$$

其中 γ_j^*,γ_j' 分别表示 $\gamma_j(j=1,2)$ 的实数部分与虚数部分.

解出 $\gamma_1^*,\gamma_1',\gamma_2^*,\gamma_2'$，最后，可以求得应力函数为

$$\Phi(z_1)=\frac{1}{2a\pi(v_1-v_2)}\int_{L_0}(\mathrm{i}v_2P-T)\cot\frac{t-z_1}{a}\,\mathrm{d}t-\frac{B_1P^*}{2(G_1-G_2)}-\mathrm{i}\frac{B_4T^*v_2}{2(H_1v_2-H_2v_1)},\tag{3.18}$$

$$\Psi(z_2)=\frac{-1}{2a\pi(v_1-v_2)}\int_{L_0}(\mathrm{i}v_1P-T)\cot\frac{t-z_2}{a}\,\mathrm{d}t+\frac{B_1P^*}{2(G_1-G_2)}+\mathrm{i}\frac{B_4T^*v_1}{2(H_1v_2-H_2v_1)},\tag{3.19}$$

这里 P^*,T^* 的力学意义分别为 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的外压应力和剪切应力. 事实上，将(3.18),(3.19) 代入(3.3) 与(3.4)，并令 $z\to-\infty\mathrm{i}$，可以得到

$$\sigma_y(-\infty i) = -P^*, \tag{3.20}$$

$$\tau_{xy}(-\infty i) = T^*. \tag{3.21}$$

这就是我们在前面叙述过的平衡条件. 类似地考虑 $\sigma_x(-\infty i)$，有

$$\sigma_x(-\infty i) = \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}P^*. \tag{3.22}$$

注意到 $\beta_{11} > 0$，$\beta_{12} < 0$，由(3.22)知，当 $P^* > 0$ 时，有

$$\sigma_x(-\infty i) < 0.$$

因此，可以推得下列结论：在正交各向异性(正交异性轴与坐标轴平行)弹性半平面的第一基本问题中，如在边界的一个周期线段上正应力的合力为压力，

$$\int_{L_0} P(t)\mathrm{d}t = a\pi P^* > 0,$$

则在 $z = -\infty i$ 处的 σ_x 也为压应力，并由(3.22)确定.

例 3.1　设在正交各向异性(正交异性轴与坐标轴平行)弹性半平面的边界上，部分受有周期均匀压应力：在边界的一个周期线段 $-\frac{1}{2}a\pi \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}a\pi$ 上，

$$P(t) = \begin{cases} P, & |t| \leqslant l; \\ 0, & l < |t| \leqslant \dfrac{a\pi}{2}, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$T(t) = 0, \quad |t| \leqslant \frac{a\pi}{2}, \tag{3.24}$$

其中 P 为常数. 设 γ_0 为线段 $-l \leqslant t \leqslant l$，且取自左至右为正向.

此时，由前面结果可得应力函数为

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{\mathrm{i}v_2 P}{2\pi(v_1 - v_2)}\left[\ln\left|\sin\frac{t-z}{a}\right| + \mathrm{i}\arg\sin\frac{t-z_1}{a}\right]_{\gamma_0} \\ &\quad - \frac{B_1 lP}{a\pi(G_1 - G_2)}, \\ \Psi(z_2) &= \frac{-\mathrm{i}v_1 P}{2\pi(v_1 - v_2)}\left[\ln\left|\sin\frac{t-z_2}{a}\right| + \mathrm{i}\arg\sin\frac{t-z_2}{a}\right]_{\gamma_0} \\ &\quad - \frac{B_1 lP}{a\pi(G_1 - G_2)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

其中$[\cdots]_{\gamma_0}$ 表示括号内函数当 t 沿 γ_0 自 $-l$ 变为 l 时的改变量. 应力分布为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{v_1 v_2 P}{\pi(v_1 - v_2)}\left\{v_1\left[\arg\sin\frac{t-z_1}{a}\right]_{\gamma_0}\right.\\
&\quad\left.-v_2\left[\arg\sin\frac{t-z_2}{a}\right]_{\gamma_0}+\frac{2B_1 l(v_1^2-v_2^2)P}{a\pi(G_1-G_2)}\right\},\\
\sigma_y &= \frac{P}{\pi(v_1 - v_2)}\left\{-v_2\left[\arg\sin\frac{t-z_1}{a}\right]_{\gamma_0}\right.\\
&\quad\left.+v_1\left[\arg\sin\frac{t-z_2}{a}\right]_{\gamma_0}\right\},\\
\tau_{xy} &= \frac{v_1 v_2 P}{\pi(v_1 - v_2)}\ln\left|\frac{\sin\frac{l-z_1}{a}\ \sin\frac{l+z_2}{a}}{\sin\frac{l+z_1}{a}\ \sin\frac{l-z_2}{a}}\right|.
\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

如在(3.26)式中令 $a\to+\infty$，可以得到正交各向异性半平面边界上一段区间$[-l,l]$上受有均匀压力 P 的应力分布为

$$\sigma_x = \frac{v_1 v_2 P}{\pi(v_1 - v_2)}\{v_1[\arg(t-z_1)]_{\gamma_0}-v_2[\arg(t-z_2)]_{\gamma_0}\},$$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi(v_1 - v_2)}\{-v_2[\arg(t-z_1)]_{\gamma_0}+v_1[\arg(t-z_2)]_{\gamma_0}\},$$

$$\tau_{xy} = \frac{v_1 v_2 P}{\pi(v_1 - v_2)}\ln\left|\frac{(l-z_1)(l+z_2)}{(l+z_1)(l-z_2)}\right|.$$

其次，考虑边界上有一组周期集中压力 P_0 时的情况.

这可在(3.25)式和(3.26)式中，令 $l\to 0$，$P\to\infty$，但使 $2lP=P_0$，得到应力函数为

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(z_1) &= \frac{-\mathrm{i}v_2 P_0}{2a\pi(v_1-v_2)}\cot\frac{z_1}{a}-\frac{B_1 P_0}{2a\pi(G_1-G_2)},\\
\Psi(z_2) &= \frac{\mathrm{i}v_1 P_0}{2a\pi(v_1-v_2)}\cot\frac{z_2}{a}+\frac{B_1 P_0}{2a\pi(G_1-G_2)},
\end{aligned}\right\}\tag{3.27}$$

以及应力分布为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{v_1 v_2 P_0}{a\pi(v_1-v_2)}\left(v_1\,\mathrm{Im}\cot\frac{z_1}{a}-v_2\,\mathrm{Im}\cot\frac{z_2}{a}\right)\\
&\quad+\frac{B_1 P_0}{a\pi(G_1-G_2)}(v_1^2-v_2^2),\\
\sigma_y &= \frac{P_0}{a\pi(v_1-v_2)}\left(v_2\,\mathrm{Im}\cot\frac{z_1}{a}-v_1\,\mathrm{Im}\cot\frac{z_2}{a}\right),\\
\tau_{xy} &= -\frac{v_1 v_2 P_0}{a\pi(v_1-v_2)}\left(\mathrm{Re}\cot\frac{z_1}{a}-\mathrm{Re}\cot\frac{z_2}{a}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{3.28}$$

若在式(3.28)中，令 $a\to+\infty$，便可得到该半平面介质在原点受有集中压力 P_0 时的应力分布

$$\sigma_x=-\frac{v_1v_2(v_1+v_2)P_0}{\pi}\frac{x^2y}{(x^2+v_1^2y^2)(x^2+v_2^2y^2)},$$

$$\sigma_y=\frac{v_1v_2(v_1+v_2)P_0}{\pi}\frac{y^3}{(x^2+v_1^2y^2)(x^2+v_2^2y^2)},$$

$$\tau_{xy}=-\frac{v_1v_2(v_1+v_2)P_0}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2+v_1^2y)(x^2+v_2^2y^2)}.$$

这与 Лехницкий [1] 中的结果是相符的.

例 3.2　设弹性半平面如前，在其边界上，部分地受有周期均匀剪切载荷，即在边界的一个周期线段上，

$$P(t)=0,\ |t|\leqslant\frac{a\pi}{2};\quad T(t)=\begin{cases}T, & |t|\leqslant l;\\ 0, & l<|t|\leqslant\frac{a\pi}{2};\end{cases}$$

其中 T 为常数.

此时，应力函数为

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z_1)&=\frac{-T}{2(v_1-v_2)\pi}\left[\ln\left|\sin\frac{t-z_1}{a}\right|+\mathrm{i}\arg\sin\frac{t-z_1}{a}\right]_{\gamma_0},\\ \Psi(z_2)&=\frac{T}{2(v_1-v_2)\pi}\left[\ln\left|\sin\frac{t-z_2}{a}\right|+\mathrm{i}\arg\sin\frac{t-z_2}{a}\right]_{\gamma_0};\end{aligned}\right\}\quad(3.29)$$

应力分布为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{T}{\pi(v_1-v_2)}\left\{v_1^2\ln\left|\frac{\sin\frac{l-z_1}{a}}{\sin\frac{l+z_1}{a}}\right|-v_2^2\ln\left|\frac{\sin\frac{l-z_2}{a}}{\sin\frac{l+z_2}{a}}\right|\right\},\\ \sigma_y&=\frac{T}{\pi(v_1-v_2)}\ln\left|\frac{\sin\frac{l-z_2}{a}\sin\frac{l+z_1}{a}}{\sin\frac{l-z_1}{a}\sin\frac{l+z_2}{a}}\right|,\\ \tau_{xy}&=\frac{-T}{\pi(v_1-v_2)}\left[v_1\arg\sin\frac{l-z_1}{a}-v_2\arg\sin\frac{l-z_2}{a}\right]_{\gamma_0}.\end{aligned}\right\}\quad(3.30)$$

在(3.30)式中，令 $a\to+\infty$，又可以得到在正交各向异性半平面 S^- 边界上的线段 $\gamma_0=[-l,l]$ 上受均匀剪切力 T 时的应力分布：

$$\sigma_x=\frac{T}{\pi(v_1-v_2)}\left(v_1^2\ln\left|\frac{l-z_1}{l+z_1}\right|-v_2^2\ln\left|\frac{l-z_2}{l+z_2}\right|\right),$$

$$\sigma_y = \frac{T}{\pi(v_1 - v_2)}\ln\left|\frac{(l - z_2)(l + z_1)}{(l - z_1)(l + z_2)}\right|,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{T}{\pi(v_1 - v_2)}[v_1 \arg(l - z_1) - v_2 \arg(l - z_2)]_{\gamma_0}.$$

其次，考虑在正交各向异性半平面 S^- 的边界上作用着周期集中剪切力 T_0 的情况. 在(3.29) 中令 $l \to 0$，$T \to \infty$ 但保持 $2lT = T_0$.

此时，应力函数为

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{T_0}{2(v_1 - v_2)\pi} \cot \frac{z_1}{a}, \\ \Psi(z_2) &= \frac{-T_0}{2(v_1 - v_2)\pi} \cot \frac{z_2}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

而应力分布为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{T_0}{\pi(v_1 - v_2)}\mathrm{Re}\left\{- v_1^2 \cot \frac{z_1}{a} + v_2^2 \cot \frac{z_2}{a}\right\}, \\ \sigma_y &= \frac{T_0}{\pi(v_1 - v_2)}\mathrm{Re}\left\{\cot \frac{z_1}{a} - \cot \frac{z_2}{a}\right\}, \\ \tau_{xy} &= \frac{T_0}{\pi(v_1 - v_2)}\mathrm{Im}\left\{v_1 \cot \frac{z_1}{a} - v_2 \cot \frac{z_2}{a}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

在(3.32) 式中，若令 $a \to +\infty$，便有在半平面边界的原点处，作用有集中剪切力情况的应力分布：

$$\sigma_x = -\frac{(v_1 + v_2)T_0}{\pi}\frac{x^3}{(x^2 + v_1^2 y^2)(x^2 + v_2^2 y^2)},$$

$$\sigma_y = -\frac{(v_1 + v_2)T_0}{\pi}\frac{xy^2}{(x^2 + v_1^2 y^2)(x^2 + v_2^2 y^2)},$$

$$\tau_{xy} = \frac{(v_1 + v_2)T_0}{\pi}\frac{x^2 y}{(x^2 + v_1^2 y^2)(x^2 + v_2^2 y^2)}.$$

3.3.2 第二基本问题

设在各向异性弹性半平面 S^- 的边界 x 轴上，已知位移分布：

$$u^- + \mathrm{i}v^- = g_1(t) + \mathrm{i}g_2(t). \tag{3.33}$$

这里，$g_1(t) + \mathrm{i}g_2(t)$ 以 $a\pi$ 为周期，并且连续(且允许含一任意常数项，它相应于整个弹性体的刚性平移). 而 $g_1'(t) + \mathrm{i}g_2'(t)$ 分段地满足 Hölder 条件. 又设在边界的一个周期线段 $L_0 = \left[-\frac{a\pi}{2}, \frac{a\pi}{2}\right]$上，外应力主矢量已知为 $X + \mathrm{i}Y$.

在基本假定成立条件下，求弹性体的平衡，这就是**周期第二基本问题**.

定理 3.2　在上述条件下，周期第二基本问题的解存在且唯一.

证　应用(3.7)与(3.8)式，作 u', v' 的如下线性组合：

$$q_2 u' - p_2 v' = (p_1 q_2 - q_1 p_2)\Phi(z_1) + (\overline{p_1} q_2 - \overline{q_1} p_2)\overline{\Phi(z_1)} + (q_2 \overline{p_2} - p_2 \overline{q_2})\overline{\Psi(z_2)},$$

$$q_1 u' - p_1 v' = (\overline{p_1} q_1 - \overline{q_1} p_1)\overline{\Phi(z_1)} + (p_2 q_1 - q_2 p_1)\Psi(z_2) + (\overline{p_2} q_1 - \overline{q_2} p_1)\overline{\Psi(z_2)}.$$

将上两式分别乘以 $\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}} \cot \frac{t - z_1}{a}\,\mathrm{d}t$，$\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}} \cot \frac{t - z_2}{a}\,\mathrm{d}t$，计及条件(3.33)，然后沿 L_0 积分，应用关于半平面的 Hilbert 核积分公式(1.60)，(1.61)，可以得到应力函数为

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{q_1 p_2 - p_1 q_2}\,\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} (q_2 g_1' - p_2 g_2') \cot \frac{t - z_1}{a}\,\mathrm{d}t + \gamma_1, \quad (3.34)$$

$$\Psi(z_2) = \frac{-1}{q_1 p_2 - p_1 q_2}\,\frac{1}{2a\pi \mathrm{i}}\int_{L_0} (q_1 g_1' - p_1 g_2') \cot \frac{t - z_2}{a}\,\mathrm{d}t + \gamma_2, \quad (3.35)$$

其中

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{q_1 p_2 - p_1 q_2}\big[(p_1 q_2 - q_1 p_2)\Phi(-\infty \mathrm{i}) - (\overline{p_1} q_2 - \overline{q_1} p_2)\overline{\Phi(-\infty \mathrm{i})} - (q_2 \overline{p_2} - p_2 \overline{q_2})\overline{\Psi(-\infty \mathrm{i})}\big],$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{q_1 p_2 - p_1 q_2}\big[(p_2 q_1 - q_2 p_1)\Psi(-\infty \mathrm{i}) - (\overline{p_1} q_1 - \overline{q_1} p_1)\overline{\Phi(-\infty \mathrm{i})} - (\overline{p_2} q_1 - \overline{q_2} p_1)\overline{\Psi(-\infty \mathrm{i})}\big].$$

显然，有

$$\mathrm{Re}\{p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2\} = 0, \quad (3.36)$$

$$\mathrm{Re}\{q_1 \gamma_1 + q_2 \gamma_2\} = 0.\text{①} \quad (3.37)$$

为了完全确定 γ_1, γ_2，下面还须考虑在 $z = -\infty \mathrm{i}$ 处的弹性平衡条件. 由 $g_1'(t), g_2'(t)$ 的周期性，有

$$\Phi(-\infty \mathrm{i}) = \gamma_1, \quad \Psi(-\infty \mathrm{i}) = \gamma_2.$$

应用应力表示式(3.3)，(3.4)，在 $z = -\infty \mathrm{i}$ 的应力为

$$\sigma_y(-\infty \mathrm{i}) = 2\mathrm{Re}\{\Phi(-\infty \mathrm{i}) + \Psi(-\infty \mathrm{i})\},$$

① (3.36)，(3.37)也可由位移周期性条件推出.

$$\tau_{xy}(-\infty i) = -2\mathrm{Re}\{\mu_1 \Phi(-\infty i) + \mu_2 \Psi(-\infty i)\}.$$

计及(3.1)式，于是，得到关于 γ_1, γ_2 的另外两个方程：

$$\mathrm{Re}\{\gamma_1 + \gamma_2\} = \frac{Y}{2a\pi}, \tag{3.38}$$

$$\mathrm{Re}\{\mu_1 \gamma_1 + \mu_2 \gamma_2\} = -\frac{X}{2a\pi}. \tag{3.39}$$

这样，γ_1, γ_2 可由方程(3.36) ～ (3.39)联立求得，因此应力函数已完全确定. 将(3.34)与(3.35)式代入(3.2) ～ (3.4)，即可得到本问题中弹性体的应力分布.

下面以实际工程常见情况加以说明.

当弹性半平面 S^- 为正交各向异性体(各向异性轴与两坐标轴平行)时，应力函数为

$$\Phi(z_1) = \frac{-1}{H_1 G_2 - G_1 H_2} \frac{1}{2a\pi} \int_{L_0} (\mathrm{i} G_2 g_1' - H_2 g_2') \cot \frac{t - z_1}{a} \mathrm{d}t + \gamma_1 \tag{3.40}$$

$$\Psi(z_2) = \frac{1}{H_1 G_2 - G_1 H_2} \frac{1}{2a\pi} \int_{L_0} (\mathrm{i} G_1 g_1' - H_1 g_2') \cot \frac{t - z_2}{a} \mathrm{d}t + \gamma_2, \tag{3.41}$$

其中 $\gamma_1 = \gamma_1^* + \mathrm{i}\gamma_1'$，$\gamma_2 = \gamma_2^* + \mathrm{i}\gamma_2'$ 由下列联立方程组确定

$$G_1 \gamma_1^* + G_2 \gamma_2^* = 0,$$

$$H_1 \gamma_1' + H_2 \gamma_2' = 0,$$

$$\gamma_1^* + \gamma_2^* = \frac{Y}{2a\pi},$$

$$v_1 \gamma_1' + v_2 \gamma_2' = \frac{X}{2a\pi}.$$

于是，可解出为

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1^* &= -\frac{1}{2a\pi} \frac{G_2 Y}{G_1 - G_2}, \quad \gamma_1' = -\frac{1}{2a\pi} \frac{H_2 X}{H_1 v_2 - H_2 v_1}, \\ \gamma_2^* &= \frac{1}{2a\pi} \frac{G_1 Y}{G_1 - G_2}, \quad \gamma_2' = \frac{1}{2a\pi} \frac{H_1 X}{H_1 v_2 - H_2 v_1}. \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

与各向同性弹性情况类似，显然也有结论：当且仅当 $Y = 0$ 时，$\sigma_x(-\infty i) = 0$.

例 3.3 考虑在边界上有尖劈形周期位移情况，即在边界的一个周期线段 L_0 上的位移已知为

$$g_1(t)=0,\quad g_2(t)=\begin{cases}\varepsilon\left(\dfrac{|t|}{l}-1\right), & |t|\leqslant l,\\ 0, & l<|t|\leqslant\dfrac{a\pi}{2},\end{cases}$$

如图 2.3.

此外，还假设 L_0 上的外应力主矢量为：x 方向分量 X 为零，y 方向分量为 Y ($\neq 0$)，求弹性平衡.

此时，

$$g_1'(t)=0,\quad g_2'(t)=\begin{cases}-\varepsilon/l, & t\in l_1=[-l,0],\\ \varepsilon/l, & t\in l_2=[0,l],\\ 0, & t\in L_0-l_1-l_2.\end{cases}$$

于是，可以得出应力函数为

$$\Phi(z_1)=\frac{-1}{H_1G_2-G_1H_2}\frac{\varepsilon G_2}{2\pi l}\left\{\mathrm{i}\left[\arg\sin\frac{t-z_1}{a}\right]_{l_1}-\mathrm{i}\left[\arg\sin\frac{t-z_1}{a}\right]_{l_2}\right.$$
$$\left.+\ln\left|\frac{\sin^2\dfrac{z_1}{a}}{\sin\dfrac{l-z_1}{a}\sin\dfrac{l+z_1}{a}}\right|\right\}-\frac{1}{2a\pi}\frac{G_2Y}{G_1-G_2},\tag{3.43}$$

$$\Psi(z_2)=\frac{1}{H_1G_2-G_1H_2}\frac{\varepsilon G_1}{2\pi l}\left\{\mathrm{i}\left[\arg\sin\frac{t-z_2}{a}\right]_{l_1}-\mathrm{i}\left[\arg\sin\frac{t-z_2}{a}\right]_{l_2}\right.$$
$$\left.+\ln\left|\frac{\sin^2\dfrac{z_2}{a}}{\sin\dfrac{l-z_2}{a}\sin\dfrac{l+z_2}{a}}\right|\right\}+\frac{1}{2a\pi}\frac{G_1Y}{G_1-G_2},\tag{3.44}$$

而应力分量为

$$\sigma_x=\frac{1}{H_1G_2-H_2G_1}\frac{\varepsilon}{l\pi}\left\{G_2v_1^2\ln\left|\frac{\sin^2\dfrac{z_1}{a}}{\sin\dfrac{l+z_1}{a}\sin\dfrac{l-z_1}{a}}\right|\right.$$
$$\left.-G_1v_2^2\ln\left|\frac{\sin^2\dfrac{z_2}{a}}{\sin\dfrac{l+z_2}{a}\sin\dfrac{l-z_2}{a}}\right|\right\}$$
$$-\frac{1}{a\pi}\frac{Y}{G_1-G_2}(G_2v_1^2-G_1v_2^2),$$

$$\sigma_y = \frac{-1}{H_1G_2 - G_1H_2}\frac{\varepsilon}{l\pi}\left\{G_2\ln\left|\frac{\sin^2\frac{z_1}{a}}{\sin\frac{l+z_1}{a}\sin\frac{l-z_1}{a}}\right|\right.$$

$$\left.-G_1\ln\left|\frac{\sin^2\frac{z_2}{a}}{\sin\frac{l+z_2}{a}\sin\frac{l-z_2}{a}}\right|\right\}+\frac{Y}{a\pi},$$

$$\tau_{xy} = \frac{-1}{H_1G_2 - G_1H_2}\frac{\varepsilon}{l\pi}\left\{v_1G_2\left[\arg\sin\frac{t-z_1}{a}\right]_{l_1}\right.$$

$$-v_1G_2\left[\arg\sin\frac{t-z_1}{a}\right]_{l_2}-v_2G_1\left[\arg\sin\frac{t-z_2}{a}\right]_{l_1}$$

$$\left.+v_2G_1\left[\arg\sin\frac{t-z_2}{a}\right]_{l_2}\right\}. \tag{3.45}$$

如在(3.45)中令 $a\to+\infty$，便可得到半平面 S^- 边界上一段区间 $[-l,l]$ 上有一个尖劈位移时的应力分布为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{1}{H_1G_2 - G_1H_2}\frac{\varepsilon}{l\pi}\left\{G_2v_1^2\ln\left|\frac{z_1^2}{(l+z_1)(l-z_1)}\right|\right.\\
&\quad\left.-G_1v_2^2\ln\left|\frac{z_2^2}{(l+z_2)(l-z_2)}\right|\right\},\\
\sigma_y &= \frac{-1}{H_1G_2 - G_1H_2}\frac{\varepsilon}{l\pi}\left\{G_2\ln\left|\frac{z_1^2}{(l+z_1)(l-z_1)}\right|\right.\\
&\quad\left.-G_1\ln\left|\frac{z_2^2}{(l+z_2)(l-z_2)}\right|\right\},\\
\tau_{xy} &= \frac{-1}{H_1G_2 - G_1H_2}\frac{\varepsilon}{l\pi}\left\{v_1G_2[\arg(t-z_1)]_{l_1}\right.\\
&\quad-v_1G_2[\arg(t-z)]_{l_1}+v_2G_1[\arg(t-z_2)]_{l_1}\\
&\quad\left.-v_2G_1[\arg(t-z_2)]_{l_2}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

3.3 各向异性弹性半平面的周期接触问题

这里，将讨论一列周期排列的压头，压入各向异性半平面的接触问题，假定接触部分摩擦系数 ρ 存在．当摩擦力不存在时，令 $\rho=0$ 即可．

3.3.1 应力函数由应力分量边界值表示

为此，考虑 σ_y 与 τ_{xy} 的如下线性组合，由(3.3),(3.4)，有

$$\begin{aligned}\mu_1\sigma_y+\tau_{xy}&=(\mu_1-\overline{\mu_1})\overline{\Phi(z_1)}+(\mu_1-\mu_2)\Psi(z_2)\\&\quad+(\mu_1-\overline{\mu_2})\overline{\Psi(z_2)},\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\mu_2\sigma_y+\tau_{xy}&=(\mu_2-\mu_1)\Phi(z_1)+(\mu_2-\overline{\mu_1})\overline{\Psi(z_1)}\\&\quad+(\mu_2-\overline{\mu_2})\overline{\Psi(z_2)}.\end{aligned}\tag{3.48}$$

由引理 3.1，$\Phi(z_1)$,$\Psi(z_2)$ 为周期函数. 对上列两式取边界值(即令 z 从 S^- 内趋于 L_0)，应用关于半平面的 Hilbert 核积分公式(1.60),(1.61)，有

$$\Phi(z_1)=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}\int_{L_0}(\mu_2\sigma_y(t)+\tau_{xy}(t))\cot\frac{t-z_1}{a}\,\mathrm{d}t,\tag{3.49}$$

$$\Psi(z_2)=-\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}\int_{L_0}(\mu_1\sigma_y(t)+\tau_{xy}(t))\cot\frac{t-z_2}{a}\,\mathrm{d}t,\tag{3.50}$$

其中 $L_0=\left[-\frac{a\pi}{2},\frac{a\pi}{2}\right]$. 这里已记

$$\sigma_y(t)=\sigma_y^-(t),\quad \tau_{xy}(t)=\tau_{xy}^-(t),\quad t\in L.$$

下面应用此两式，可推求$\frac{\partial v}{\partial x}$在边界上的表示式，对(3.8)式两边取边值，由推广的 Plemelj 公式，有

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{y=0}=q_1\Phi^-(x)+\overline{q_1}\,\overline{\Phi^-(x)}+q_2\Psi^-(x)+\overline{q_2}\,\overline{\Psi^-(x)}.\tag{3.51}$$

将 $\Phi(z_1)$,$\Psi(z_2)$ 的表示式(3.49),(3.50) 代入(3.51) 式，经过简化，立即可以得到

$$\begin{aligned}-\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{y=0}&=\frac{A_3}{a\pi}\int_{L_0}\sigma_y(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t+B_3\sigma_y(x)\\&\quad+\frac{A_4}{a\pi}\int_{L_0}\tau_{xy}(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t+B_4\tau_{xy}(x),\end{aligned}\tag{3.52}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_3&=\frac{\beta_{22}}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\overline{\mu_1}}+\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\overline{\mu_2}}\right),\\B_3&=-\frac{\beta_{22}}{2}\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\overline{\mu_1}}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\overline{\mu_2}}\right)+\beta_{26},\\A_4&=-\frac{\beta_{22}}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}-\frac{1}{\overline{\mu_1}\,\overline{\mu_2}}\right),\\B_4&=-\frac{\beta_{22}}{2}\left(\frac{1}{\mu_1\mu_2}+\frac{1}{\overline{\mu_1}\,\overline{\mu_2}}\right)+\beta_{12}.\end{aligned}\right\}\tag{3.53}$$

顺便指出，(3.52) 式将在边值条件的演化中起着关键作用.

3.3.2　问题的提法与边值条件

各向异性半平面弹性理论的周期接触问题的提法如下.

假设有一列周期排列的压头(所有压头基底形状相同)，压入各向异性弹性半平面 S^- 中，而且周期排列的压头与 S^- 的边界之间有摩擦力存在，摩擦系数为 ρ，即在压头正下方，剪切应力 $T(x) = \tau_{xy}(x)$ 与正压应力 $P(x) = -\sigma_y(x)$ 之间服从规律

$$T(x) = \rho P(x), \quad x \in \gamma_0 \text{ (及其周期合同线段)}$$

或即

$$\tau_{xy}(x) + \rho\sigma_y(x) = 0, \quad x \in \gamma_0 \text{ (及其周期合同线段)}$$

其中 γ_0 为位于一个周期区间 L_0 内的压头与 L_0 的接触线段. 假定压头处于极限平衡状态.

此时，根据周期性，只需在一个周期区间 L_0 上考虑.

在自由区间 $L_0 - \gamma_0$(及其周期合同区间) 上，无外载荷存在，即有

$$\sigma_y(x) = 0,\ \tau_{xy}(x) = 0, \quad x \in L_0 - \gamma_0;$$

在压头的正下方 γ_0 上，

$$\tau_{xy}(x) + \rho\sigma_y(x) = 0, \quad x \in \gamma_0.$$

此外，还设已知

$$v^-(x) = f(x), \quad x \in \gamma_0, \tag{3.54}$$

其中 $y = f(x)$ 为压头基底的方程，它以 $a\pi$ 为周期，且 $f'(x)$ 满足 Hölder 条件.

其次，在 γ_0 上，已知外压力合力为 P_0，因而，外应力主矢量

$$X + \mathrm{i}Y = T_0 - \mathrm{i}P_0 = (\rho - \mathrm{i})P_0.$$

在这些条件下，求弹性平衡.

于是，在 L_0 上，得到边值条件为:

$$\sigma_y(x) = 0,\ \tau_{xy}(x) = 0, \quad x \in L_0 - \gamma_0, \tag{3.55}$$
$$\tau_{xy}(x) + \rho\sigma_y(x) = 0,\ v^-(x) = f(x), \quad x \in \gamma_0.$$

为了求解上述问题，须演变边值条件(3.55). 为此，引入两个 Hilbert 核积分所表示的 S^- 中的全纯函数:

$$w_1(z) = u_1(z) - \mathrm{i}v_1(z) = \int_{L_0} \sigma_y(t) \cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t, \tag{3.56}$$

$$w_2(z) = u_2(z) - \mathrm{i}v_2(z) = \int_{L_0} \tau_{xy}(t) \cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t + \beta, \tag{3.57}$$

其中 β 为一待定实常数.[①]

当 z 由 S^- 内趋于 L_0 上点 x 时，由推广的 Plemelj 公式，有

$$w_1^-(x) = u_1^-(x) - \mathrm{i}v_1^-(x) = \int_{L_0} \sigma_y(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t - a\pi\mathrm{i}\sigma_y(x),$$

$$w_2^-(x) = u_2^-(x) - \mathrm{i}v_2^-(x) = \int_{L_0} \tau_{xy}(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t - a\pi\mathrm{i}\tau_{xy}(x).$$

比较上列两式的实部与虚部，可以得到如下几个等式：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y(x) &= \frac{1}{a\pi}v_1^-(x) = \frac{1}{a\pi}\mathrm{Im}\,w_1^-(x), \\ \tau_{xy}(x) &= \frac{1}{a\pi}v_2^-(x) = \frac{1}{a\pi}\mathrm{Im}\,w_2^-(x), \\ u_1^-(x) &= \int_{L_0} \sigma_y(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t, \\ u_2^-(x) &= \int_{L_0} \tau_{xy}(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}\right\} \tag{G}$$

由于在每个周期边界上，有限宽度的压头传递压力时，在压头下面(连同它的端点也包括在内)，不可能发生集中应力，这样，由(3.56)，(3.57)，作为用 Hilbert 核积分表示的函数 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$，在压头的任一端点 x_0 处，只可能具有形式为 $\left(\tan\frac{z}{a} - \tan\frac{x_0}{a}\right)^{-\lambda}$ 的可积奇异性($0 < \lambda < 1$).

由于 $v^-(x) = f(x)$，(3.52) 式变为

$$\begin{aligned} -f'(x) = {} & \frac{A_3}{a\pi}\int_{L_0} \sigma_y(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t + B_3\sigma_y(x) \\ & + \frac{A_4}{a\pi}\int_{L_0} \tau_{xy}(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t + B_4\tau_{xy}(x), \\ & x \in \gamma_0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

因此，我们能应用函数 $w_1(z)$，$w_2(z)$ 演变条件(3.55) 为

$$\left.\begin{aligned} & v_1^-(x) = 0,\ v_2^-(x) = 0, \quad x \in L_0 - \gamma_0, \\ & -f'(x) = \frac{A_3}{a\pi}u_1^-(x) + \frac{B_3}{a\pi}v_1^-(x) + \frac{A_4}{a\pi}u_2^-(x) \\ & \qquad + \frac{B_4}{a\pi}v_2^-(x), \quad x \in \gamma_0, \\ & v_2^-(x) + \rho v_1^-(x) = 0, \quad x \in \gamma_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

---

① 出现 β 的必要性将在后面第 4 段清楚看出.

由此，注意到最后方程，$w_1(z)$ 应满足下列边值条件：

$$\left.\begin{aligned} v_1^-(x) &= 0, & x \in L_0 - \gamma_0, \\ u_1^-(x) + \frac{B_3 - \rho B_4}{A_3 - \rho A_4} v_1^-(x) &= -\frac{a\pi f'(x)}{A_3 - \rho A_4}, & x \in \gamma_0. \end{aligned}\right\} \quad (3.60)$$

上述边值问题实际上是：要求一个在 S^- 内以 $a\pi$ 为周期的全纯函数 $w_1(z) = u_1(z) - \mathrm{i}v_1(z)$，在 L_0（以及周期线段）上满足条件

$$a(x)u_1^-(x) + b(x)v_1^-(x) = F(x), \quad x \in L_0, \quad (3.61)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a(x) &= \begin{cases} 1, & x \in \gamma_0; \\ 0, & x \in \gamma' = L_0 - \gamma_0, \end{cases} \\ b(x) &= \begin{cases} \dfrac{B_3 - \rho B_4}{A_3 - \rho A_4}, & x \in \gamma_0; \\ 1, & x \in \gamma_0', \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (3.62)$$

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{a\pi f'(x)}{A_3 - \rho A_4}, & x \in \gamma_0; \\ 0, & x \in \gamma_0', \end{cases} \quad (3.63)$$

对 $x \in \gamma$ 与 γ'（γ, γ' 分别是所有与 γ_0, γ_0' 周期合同线段之并）也是如此. 这就是要求解这个第一章中所述关于半平面的周期 Riemann-Hilbert 边值问题.

下段将讨论这问题的解答.

3.3.3 问题的解答

首先，应该注意到 $a(x), b(x)$ 与 $F(x)$ 都以 $x = \pm l \left(|l| < \frac{a\pi}{2}\right)$ 为间断点，因而，函数 $w_1(z)$ 也能以这些间断点作为奇异点.

按照(1.39)式，现在，

$$a_1 + \mathrm{i}b_1 = 1 + \mathrm{i}\,\frac{B_3 - \rho B_4}{A_3 - \rho A_4}, \quad a_2 + \mathrm{i}b_2 = \mathrm{i},$$

所以，由(1.40)式，

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1 = \arctan \dfrac{B_3 - \rho B_4}{A_3 - \rho A_4}, & x \in \gamma, \\ \omega_2 = \dfrac{\pi}{2}, & x \in \gamma', \end{cases} \quad (3.64)$$

这里已取 $0 < |\omega_1| < \frac{\pi}{2}$. 因此，由(1.53)式，

$$\nu = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi} = \frac{1}{2} - \theta, \quad \theta = \frac{\omega_1}{\pi}, \quad 0 < \nu < 1. \tag{3.65}$$

于是，由(1.55)式，

$$X(z) = \pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{2\omega_1 \mathrm{i}} E(z), \quad z \in S^{\pm}, \tag{3.66}$$

其中

$$E(z) = \left(\tan\frac{l}{a} - \tan\frac{z}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+\theta}\left(\tan\frac{l}{a} + \tan\frac{z}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-\theta}, \quad \mathrm{Im}\, z \neq 0, \tag{3.67}$$

是用 γ' 剖开后的 z 平面中的全纯函数，它当 $z = t \in \gamma$ 时取非负值，因而

$$X^{+}(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\omega_1 \mathrm{i}} E(t), \quad t \in \gamma, \tag{3.68}$$

其中

$$E(t) = \left(\tan\frac{l}{a} - \tan\frac{t}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+\theta}\left(\tan\frac{l}{a} + \tan\frac{t}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-\theta}, \quad t \in \gamma, \tag{3.69}$$

右端每一因子在 γ 上取非负值.

因此，由(1.55)式，相应的

$$\Omega_0(z) = \pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\omega_1 \mathrm{i}}\left(C_1 \tan\frac{z}{a} + C_2\right)E(z), \quad z \in S^{\pm}, \tag{3.70}$$

其中 C_1, C_2 为待定实常数；由于

$$a_1 - \mathrm{i}b_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\mathrm{e}^{-\omega_1 \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\omega_1 \mathrm{i}}}{\cos\omega_1},$$

故由(1.57)式，

$$\Omega_1(z) = \frac{\pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\omega_1 \mathrm{i}} E(z)\cos\omega_1}{A_3 - \rho A_4}\int_{\gamma_0} \frac{f'(t)}{E(t)} \cot\frac{t - z}{a}\,\mathrm{d}t, \quad z \in S^{\pm}. \tag{3.71}$$

因此，我们得到

$$w_1(z) = \frac{\pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\theta\pi \mathrm{i}} E(z)\cos\theta\pi}{A_3 - \rho A_4}\int_{\gamma_0} \frac{f'(t)}{E(t)} \cot\frac{t - z}{a}\,\mathrm{d}t \pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{\pm\omega_1 \mathrm{i}}\left(C_1 \tan\frac{z}{a} + C_2\right)E(z), \quad z \in S^{\pm}, \tag{3.72}$$

而我们所要的解为 $w_1(z)$，$z \in S^{-}$.

至于 $w_2(z)$，由边界条件，显然

$$w_2(z) = -\rho w_1(z) + \beta. \tag{3.73}$$

3.3.4 位移周期性条件和弹性平衡条件

为了彻底求出我们要的解，必须确定实常数 C_1，C_2 与 β. 为此，应该考虑位移周期性条件和 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的弹性平衡条件.

首先考虑前者. 我们有位移函数的表达式

$$u+\mathrm{i}v=(p_1+\mathrm{i}q_1)\varphi(z_1)+(\overline{p_1}+\mathrm{i}\,\overline{q_1})\,\overline{\varphi(z_1)}$$
$$+(p_2+\mathrm{i}q_2)\psi(z_2)+(\overline{p_2}+\mathrm{i}\,\overline{q_2})\,\overline{\psi(z_2)}.$$

当 z 沿 Λ_-（图 2.6）变动全程时，考虑上式两端的改变量，得出

$$[u+\mathrm{i}v]_{\Lambda_-}=(p_1+\mathrm{i}q_1)\int_{\Lambda_-}\Phi(z_1)\mathrm{d}z_1+(\overline{p_1}+\mathrm{i}\,\overline{q_1})\int_{\Lambda_-}\overline{\Phi(z_1)}\mathrm{d}z_1$$
$$+(p_2+\mathrm{i}q_2)\int_{\Lambda_-}\Psi(z_1)\mathrm{d}z_1+(\overline{p_2}+\mathrm{i}\,\overline{q_2})\int_{\Lambda_-}\overline{\Psi(z_2)}\mathrm{d}z_2. \tag{3.74}$$

利用(3.49)式和(3.50)式，可知 $\Phi(z_1)$ 与 $\Psi(z_2)$ 可用 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 表出：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z_1)&=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}(\mu_2w_1(z_1)+w_2(z_1)),\\ \Psi(z_2)&=\frac{-1}{2a\pi\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}(\mu_1w_1(z_2)+w_2(z_2)).\end{aligned}\right\} \tag{3.75}$$

将其代入(3.74)式，便知

$$\begin{aligned}&[u+\mathrm{i}v]_{\Lambda_-}\\ &=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)}\Big\{[\mu_2(p_1+\mathrm{i}q_1)-\mu_1(p_2+\mathrm{i}q_2)]\int_{\Lambda_-}w_1(z)\mathrm{d}z\\ &\quad+[(p_1+\mathrm{i}q_1)-(p_2+\mathrm{i}q_2)]\int_{\Lambda_-}w_2(z)\mathrm{d}z\Big\}\\ &\quad-\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}(\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2})}\Big\{[\overline{\mu_2}(\overline{p_1}+\mathrm{i}\,\overline{q_1})-\overline{\mu_1}(\overline{p_2}+\mathrm{i}\,\overline{q_2})]\int_{\Lambda_-}\overline{w_1(z)}\mathrm{d}z\\ &\quad+[(\overline{p_1}+\mathrm{i}\,\overline{q_1})-(\overline{p_2}+\mathrm{i}\,\overline{q_2})]\int_{\Lambda_-}\overline{w_2(z)}\mathrm{d}z\Big\}.\end{aligned}$$

由位移周期性条件，它必须等于 0. 于是，由(3.73)式，便知

$$(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\int_{\Lambda_-}w_1(z)\mathrm{d}z+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\int_{\Lambda_-}\overline{w_1(z)}\mathrm{d}z+a\pi\beta(\varepsilon_3+\mathrm{i}\delta_3)=0, \tag{3.76}$$

这里我们已令

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1&=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\Big\{[\mu_2(p_1+\mathrm{i}q_1)-\mu_1(p_2+\mathrm{i}q_2)]\\
&\quad-\rho[(p_1+\mathrm{i}q_1)-(p_2+\mathrm{i}q_2)]\Big\},\\
\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2&=-\frac{1}{\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}}\Big\{[\overline{\mu_2}(\overline{p_1}+\mathrm{i}\,\overline{q_1})-\overline{\mu_1}(\overline{p_2}+\mathrm{i}\,\overline{q_2})]\\
&\quad-\rho[(\overline{p_1}+\mathrm{i}\,\overline{q_1})-(\overline{p_2}+\mathrm{i}\,\overline{q_2})]\Big\},\\
\varepsilon_3+\mathrm{i}\delta_3&=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}[(p_1+\mathrm{i}q_1)-(p_2+\mathrm{i}q_2)]\\
&\quad-\frac{1}{\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}}[(\overline{p_1}+\mathrm{i}\,\overline{q_1})-(\overline{p_2}+\mathrm{i}\,\overline{q_2})].
\end{aligned}\right\}\tag{3.77}$$

为要算出(3.76)式中出现的积分，我们注意到

$$\left.\begin{aligned}
&E(-\infty\mathrm{i})=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\pi}\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}},\\
&E(+\infty\mathrm{i})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\pi}\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}},\\
&\int_{\Lambda_\pm}E(z)\mathrm{d}z=a\pi E(\pm\infty\mathrm{i})=\pm a\pi\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\theta\pi}\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}},\\
&\int_{\Lambda_\pm}E(z)\tan z\,\mathrm{d}z=\int_{\Lambda_\pm}E(z)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}z=\pm a\pi\mathrm{i}E(\pm\infty\mathrm{i})\\
&\qquad=a\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\theta\pi}\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}.
\end{aligned}\right\}\tag{3.78}$$

由(3.72)，便得

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda_-}w_1(z)\mathrm{d}z&=\frac{-a\pi\cos\dfrac{l}{a}\cos\theta\pi\,\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}}{A_3-\rho A_4}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\mathrm{d}t\\
&\quad+a\pi\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}C_1+\mathrm{i}a\pi\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}C_2.
\end{aligned}$$

又因$\overline{w_1(z)}=w_1(\bar z)$，且在$\Lambda_-$上$\mathrm{d}z=\mathrm{d}\bar z$，故有

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda_-}\overline{w_1(z)}\mathrm{d}z&=\int_{\Lambda_-}w_1(\bar z)\mathrm{d}z=\int_{\Lambda_-}w_1(\bar z)\mathrm{d}\bar z=\overline{\int_{\Lambda_-}w_1(z)\mathrm{d}z}\\
&=\frac{-a\pi\cos\dfrac{l}{a}\cos\theta\pi\,\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}}{A_3-\rho A_4}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\mathrm{d}t\\
&\quad+a\pi\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}C_1-\mathrm{i}a\pi\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}C_2.
\end{aligned}$$

于是，位移周期性条件(3.76)式成为

$$\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}\right]C_1$$
$$+\mathrm{i}\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}-(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}\right]C_2+(\varepsilon_3+\mathrm{i}\delta_3)\beta a\pi$$
$$=\frac{\cos\pi\theta}{A_3-\rho A_4}\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}\right]\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\mathrm{d}t. \quad (3.79)$$

其次，考虑 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的平衡条件. 由(3.1)式，它是

$$\sigma_y(-\infty\mathrm{i})=-\frac{P_0}{a\pi}. \quad (3.80)$$

将(3.75)式代入(3.3)式，令 $z\to-\infty\mathrm{i}$（这时 z_1,z_2 也 $\to-\infty\mathrm{i}$），并注意到(3.73)式，故平衡条件(3.80)式变成

$$P_0=\mathrm{Im}\,w_1(-\infty\mathrm{i}). \quad (3.81)$$

在(3.72)式中令 $z\to-\infty\mathrm{i}$，由(3.78)的第一式，我们有

$$w_1(-\infty\mathrm{i})=-\cos\frac{l}{a}\cos\pi\theta\,\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\mathrm{d}t$$
$$+(C_1+\mathrm{i}C_2)\cos\frac{l}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}.$$

将它代入(3.81)式，条件(3.80)就成为

$$\frac{P_0}{\cos\frac{l}{a}}-\frac{\cos\pi\theta\sin\frac{2l\theta}{a}}{A_3-\rho A_4}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\mathrm{d}t=C_2\cos\frac{2l\theta}{a}-C_1\sin\frac{2l\theta}{a}. \quad (3.82)$$

这样，C_1,C_2,β就可由方程(3.79)（为两个实方程）和(3.82)惟一确定. 问题便完全解决.

3.3.5 压头正下方的压应力

为了求出作用在压头正下方的压应力分布 $p(x)$，我们注意

$$\sigma_y(x)=-p(x),\quad x\in\gamma_0.$$

应用(G)中第一式，我们得知

$$p(x)=-\frac{1}{a\pi}\mathrm{Im}\,w_1^-(x),\quad x\in\gamma_0.$$

由推广的 Plemelj 公式，得到

$$p(x)=\frac{1}{2(A_3-\rho A_4)}\left(-\sin2\theta\pi\,f'(x)+\frac{2\cos^2\theta\pi}{a\pi}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$+\frac{\cos\theta\pi}{a\pi}E(x)\left(C_1\tan\frac{x}{a}+C_2\right),\quad x\in\gamma_0. \quad (3.83)$$

例 3.4　考虑压头具有周期水平直基底的情况.

这时，$f'(x)=0$. 于是，由(3.83) 式，

$$p(x)=\frac{\cos\theta\pi}{a\pi}E(x)\left(C_1\tan\frac{x}{a}+C_2\right),\quad x\in\gamma_0,\tag{3.84}$$

其中 C_1, C_2(以及 β) 由联立方程

$$\begin{aligned}&\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}\right]C_1\\&+\mathrm{i}\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\mathrm{e}^{-\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}-(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\mathrm{e}^{\frac{2l\theta}{a}\mathrm{i}}\right]C_2+(\varepsilon_3+\mathrm{i}\delta_3)\beta\\=&\ 0,\end{aligned}$$

$$C_2\cos\frac{2l\theta}{a}-C_1\sin\frac{2l\theta}{a}=\frac{P_0}{\cos\dfrac{l}{a}}$$

确定(见(3.79) 与(3.82) 式).

第四章

各向同性半平面弹性理论中的周期运动载荷的基本问题

4.1 应力函数和基本问题

在本章中，将研究在各向同性弹性半平面边界上具有周期运动载荷的问题．它在某方面与上一章中讨论的问题相类似．我们将讨论应力函数的周期性，基本问题，以及接触问题．

4.1.1 各向同性半平面边界上具有周期运动载荷时应力函数的周期性

熟知(参见 Галин [1])，当各向同性半平面 S^- 沿着其边界具有以常速 w (>0 或 <0) 的运动载荷时，在 $z=x+\mathrm{i}y$ 处其应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 和位移分量 u,v 可用两个复应力函数 $\varphi(z_1),\psi(z_2)$ 及其导数 $\Phi(z_1)=\varphi'(z_1)$，$\Psi(z_2)=\psi'(z_2)$ 表示为

$$\sigma_x(z)=\mathrm{i}(K\Phi(z_1)-K\overline{\Phi(z_1)}+F\Psi(z_2)-F\overline{\Psi(z_2)}),\qquad(4.1)$$

$$\sigma_y(z)=\mathrm{i}(G\Phi(z_1)-G\overline{\Phi(z_1)}+H\Psi(z_2)-H\overline{\Psi(z_2)}),\qquad(4.2)$$

$$\tau_{xy}(z)=\mathrm{i}(M\Phi(z_1)+M\overline{\Phi(z_1)}+N\Psi(z_2)+N\overline{\Psi(z_2)}),\qquad(4.3)$$

$$u(z)=\mathrm{i}(A\varphi(z_1)-A\overline{\varphi(z_1)}+B\psi(z_2)-B\overline{\psi(z_2)}),\qquad(4.4)$$

$$v(z)=C\varphi(z_1)+C\overline{\varphi(z_1)}+D\psi(z_2)+D\overline{\psi(z_2)},\qquad(4.5)$$

其中 $\varphi(z_1)$ 为 z_1 的全纯函数，$\psi(z_2)$ 为 z_2 的全纯函数，且

$$z_1=x+\mathrm{i}k_1y,\quad z_2=x+\mathrm{i}k_2y,$$

而

$$A=ak_1,\quad B=ak_2,\quad C=b-k_1^2,\quad D=b-k_2^2,$$

$$K=ck_1-dk_1^3,\quad F=ck_2-dk_2^3,$$

$$G=fk_1-gk_1^3,\quad H=fk_2-gk_2^3,$$

$$M=-hk_1^2+l,\quad N=-hk_2^2+l,$$

这里

$$k_1^2=1-\frac{w^2}{c_1},\quad k_2^2=1-\frac{w^2}{c_2},$$

$$a=-\frac{\lambda+\mu}{\mu},\quad b=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}-\frac{w^2}{c_2^2},$$

$$c=-(\lambda+2\mu)-\frac{\lambda w^2}{c_1^2},\quad d=\lambda,$$

$$f=(3\lambda+4\mu)-(\lambda+2\mu)\frac{w^2}{c_2^2},\quad g=\lambda+2\mu,$$

$$l=\lambda+2\mu-\frac{\mu w^2}{c_2^2},\quad h=-\lambda,$$

而

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\delta}},\quad c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}$$

分别为膨胀波与畸变波的传播速度①，且与通常那样，δ表示介质单位体积的质量，λ,μ 表示 Lamé 常数.

4.1.2　问题的提法与解答

设各向同性弹性介质占有下半平面 S^-，以 x 轴为边界，其上任意点 $z=\tau$（τ 为实数）. 设在边界上已知按周期 $a\pi$ 分布的、以常速 w 运动的法向及切向外载荷分别为

$$\sigma_y(\tau)=-P(\tau),\quad \tau_{xy}(\tau)=T(\tau),\tag{4.6}$$

它们满足分段 Hölder 条件. 在基本假定成立的条件下，求动态弹性平衡.

为此，作应力分量 σ_y,τ_{xy} 的线性组合（由(4.2)与(4.3)式）

$$N\sigma_y-\mathrm{i}H\tau_{xy}=\mathrm{i}(GN-MH)\Phi(z_1)-\mathrm{i}(GN+MH)\overline{\Phi(z_1)}-2\mathrm{i}HN\overline{\Psi(z_2)},$$

令 z_1,z_2 均趋于 x 轴上点 τ，计及边界条件(4.6)，可以得到

$$-NP(\tau)-\mathrm{i}HT(\tau)=\mathrm{i}(GN-MH)\Phi(\tau)-\mathrm{i}(GN+MH)\overline{\Phi(\tau)}-2\mathrm{i}HN\overline{\Psi(\tau)}\tag{4.7}$$

（这里及以后，为简略起见，已记 $\Phi(\tau)=\Phi^-(\tau)$，$\Psi(\tau)=\Psi^-(\tau)$）. 类似地，还可以得到

---

① 如文献中一样，我们用文字"a"表示出现在 A,B,l 中的量，而不是在下文中经常出现的"周期 $a\pi$"中的那个 a.

$$-MP(\tau)-\mathrm{i}GT(\tau)=\mathrm{i}(MH-GN)\Psi(\tau)-\mathrm{i}(HM+GN)\overline{\Psi(\tau)}$$
$$-2\mathrm{i}GM\overline{\Phi(\tau)}. \tag{4.8}$$

现将(4.7),(4.8)式两边分别乘以$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\cot\frac{\tau-z_1}{a}$，$\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\cot\frac{t-z_2}{a}$，然后，都沿 $L_0=\left[-\frac{a\pi}{2},\frac{a\pi}{2}\right]$积分，应用关于半平面的 Hilbert 核积分公式(1.60),(1.61)，便得应力函数的积分表达式：

$$\Phi(z_1)=\frac{-1}{2a\pi(GN-MH)}\int_{L_0}(NP(\tau)+\mathrm{i}HT(\tau))\cot\frac{\tau-z_1}{a}\,\mathrm{d}\tau+\gamma_1, \tag{4.9}$$

$$\Psi(z_2)=\frac{1}{2a\pi(GN-MH)}\int_{L_0}(MP(\tau)+\mathrm{i}GT(\tau))\cot\frac{\tau-z_2}{a}\,\mathrm{d}\tau+\gamma_2. \tag{4.10}$$

其中

$$\gamma_1=\frac{1}{2(GN-MH)}[(GN-MH)\Phi(-\infty\mathrm{i})$$
$$+(GN+MH)\overline{\Phi(-\infty\mathrm{i})}+2HN\overline{\Psi(-\infty\mathrm{i})}],$$
$$\gamma_2=\frac{-1}{2(GN-MH)}[(MH-GN)\Psi(-\infty\mathrm{i})$$
$$+(MH+GN)\overline{\Psi(-\infty\mathrm{i})}+2GM\overline{\Phi(-\infty\mathrm{i})}].$$

4.1.3　位移周期性条件和弹性动态平衡条件

下面要利用位移周期性条件

$$(u+\mathrm{i}v)_{\Lambda_-}=0, \tag{*}$$

其中 Λ_- 如图 2.6 所示，以及 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的平衡条件

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y(-\infty\mathrm{i})&=-\frac{1}{a\pi}\int_{L_0}P(\tau)\mathrm{d}\tau=-P^*,\\ \tau_{xy}(-\infty\mathrm{i})&=\frac{1}{a\pi}\int_{L_0}T(\tau)\mathrm{d}\tau=T^*,\end{aligned}\right\} \tag{**}$$

来确定 γ_1,γ_2.

首先，考虑位移周期性条件. 分别对(4.9),(4.10)式的两端沿 L_0 积分，如不计弹性体的刚性平移，有

$$\varphi(z_1)=\frac{-1}{2\pi(GN-MH)}\int_{L_0}(NP(\tau)+\mathrm{i}HT(\tau))\log\sin\frac{\tau-z_1}{a}\,\mathrm{d}\tau+\gamma_1z_1,$$

$$\psi(z_2)=\frac{1}{2\pi(GN-MH)}\int_{L_0}(MP(\tau)+\mathrm{i}GT(\tau))\log\sin\frac{\tau-z_2}{a}\,\mathrm{d}\tau+\gamma_2z_2.$$

由此，可以得到

$$\varphi(z_1 + a\pi) - \varphi(z_1) = \frac{-\mathrm{i}NP^* + HT^*}{2(GN - MH)} + a\pi\gamma_1,$$

$$\psi(z_2 + a\pi) - \psi(z_2) = \frac{\mathrm{i}MP^* - GT^*}{2(GN - MH)} + a\pi\gamma_2.$$

利用(4.4),(4.5)两式，代入位移周期性条件(*)式，可以得到下列两个方程：

$$A\,\mathrm{Im}\,\gamma_1 + B\,\mathrm{Im}\,\gamma_2 = \frac{AN - BM}{2a\pi(GN - MH)}P^*, \tag{4.11}$$

$$C\,\mathrm{Re}\,\gamma_1 + D\,\mathrm{Re}\,\gamma_2 = \frac{DG - CH}{2a\pi(GN - MH)}T^*. \tag{4.12}$$

然后考虑在 $z = -\infty\mathrm{i}$ 处的平衡条件. 由(4.9),(4.10)式知，

$$\Phi(-\infty\mathrm{i}) = \frac{-1}{2a\pi\mathrm{i}(GN - MH)}(NP^* + \mathrm{i}HT^*) + \gamma_1,$$

$$\Psi(-\infty\mathrm{i}) = \frac{1}{2a\pi\mathrm{i}(GN - MH)}(MP^* + \mathrm{i}GT^*) + \gamma_2.$$

计及(4.2),(4.3)两式，代入条件(* *)，又可以得到下列两方程：

$$G\,\mathrm{Im}\,\gamma_1 + H\,\mathrm{Im}\,\gamma_2 = 0, \tag{4.13}$$

$$M\,\mathrm{Re}\,\gamma_1 + N\,\mathrm{Re}\,\gamma_2 = 0. \tag{4.14}$$

因此，γ_1,γ_2 可以由(4.11) ~ (4.14)联立确定. 这样，我们求得了问题的解答；同时，也证明了本周期问题的解的存在与唯一性.

4.1.4 特殊情况

设在各向同性弹性半平面 S^- 的边界上，部分地受有以常速 w 运动的、按周期 $a\pi$ 分布的均匀外压力：在边界的一个周期线段 L_0 上，

$$P(\tau) = \begin{cases} P, & |\tau| \leqslant l \ \left(0 < l < \dfrac{a\pi}{2}\right); \\ 0, & l < |\tau| \leqslant \dfrac{a\pi}{2}; \end{cases}$$

$$T(\tau) = 0, \quad |\tau| \leqslant \frac{a\pi}{2},$$

其中 P 为正常数，求弹性平衡.

此时，由(4.11) ~ (4.14)式，可求得 γ_1,γ_2 如下：

$$\mathrm{Re}\,\gamma_1 = \mathrm{Re}\,\gamma_2 = 0,$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma_1 = \frac{H(MB - AN)lP}{(BG - AH)(GN - MH)a\pi},$$

$$\operatorname{Im}\gamma_2 = \frac{-G(MB-AN)lP}{(BG-AH)(GN-MH)a\pi}.$$

这样，应力函数可以表示为

$$\Phi(z_1) = \frac{-NP}{2a\pi(GN-MH)}\left[\ln\left|\sin\frac{\tau-z_1}{a}\right| + \mathrm{i}\arg\sin\frac{\tau-z_1}{a}\right]_{\gamma_0} + \frac{\mathrm{i}H(MB-AN)lP}{a\pi(BG-AH)(GN-MH)},$$

$$\Psi(z_2) = \frac{MP}{2a\pi(GN-MH)}\left[\ln\left|\sin\frac{\tau-z_2}{a}\right| + \mathrm{i}\arg\sin\frac{\tau-z_2}{a}\right]_{\gamma_0} - \frac{\mathrm{i}G(MB-AN)lP}{a\pi(BG-AH)(GN-MH)},$$

其中 $\gamma_0 = [-l, l]$，而应力分布为

$$\sigma_x = \frac{-P}{a\pi(GN-MH)}\left\{KN\left[\arg\sin\frac{\tau-z_1}{a}\right]_{\gamma_0} - FM\left[\arg\sin\frac{\tau-z_2}{a}\right]_{\gamma_0}\right\} - \frac{2Pl(MB-AN)(KH-FG)}{a\pi(BG-AH)(GN-MH)},$$

$$\sigma_y = \frac{-P}{a\pi(GN-MH)}\left\{GN\left[\arg\sin\frac{\tau-z_1}{a}\right]_{\gamma_0} - HM\left[\arg\sin\frac{\tau-z_2}{a}\right]_{\gamma_0}\right\},$$

$$\tau_{xy} = \frac{-PMN}{a\pi(GN-MH)}\ln\left|\frac{\sin\dfrac{l-z_1}{a}\ \sin\dfrac{l+z_2}{a}}{\sin\dfrac{l+z_1}{a}\ \sin\dfrac{l-z_2}{a}}\right|.$$

如果在 S^- 边界上作用有按周期 $a\pi$ 分布的运动（速度为 w）集中载荷时，即其每个周期线段的中点作用的集中力为 P_0，亦即，在以上讨论中，当 $l\to 0$ 时，有 $P\to +\infty$ 且保持 $2lP = P_0$（P_0 为有限正常数）.

此时，应力函数为

$$\Phi(z_1) = \frac{NP_0}{2a\pi(GN-MH)}\cot\frac{z_1}{a} + \frac{\mathrm{i}H(MB-AN)P_0}{2a\pi(BG-AH)(GN-MH)},$$

$$\Psi(z_2) = \frac{-MP_0}{2a\pi(GN-MH)}\cot\frac{z_2}{a} - \frac{\mathrm{i}G(MB-AN)P_0}{2a\pi(BG-AH)(GN-MH)};$$

应力分布为

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{P_0}{a\pi(GN-MH)}\left(KN\,\mathrm{Im}\cot\frac{z_1}{a} - FM\,\mathrm{Im}\cot\frac{z_2}{a}\right)\\
&\quad - \frac{P_0(MB-AN)(KH-FG)}{a\pi(BG-AH)(GN-MH)},\\
\sigma_y &= \frac{-P_0}{a\pi(GN-MH)}\left(GN\,\mathrm{Im}\cot\frac{z_1}{a} - HM\,\mathrm{Im}\cot\frac{z_2}{a}\right),\\
\tau_{xy} &= \frac{P_0 MN}{a\pi(GN-MH)}\,\mathrm{Re}\left\{\cot\frac{z_1}{a} - \cot\frac{z_2}{a}\right\}.
\end{aligned}
$$

对于上述特殊情况所得应力分布，如令 $w=0$，可以得到第二章中相应的结果.

4.2　运动压头的周期接触问题

在第二章 2.4 节中，对于各向同性平面弹性理论的周期接触问题，我们是假设按一定周期排列的压头是处于静态平衡状态. 本节，我们假设这些压头是以同一方向的常速沿半平面 S^- 的边界移动. 在这种情况，所有讨论和该节对于各向异性体情况的讨论非常相似. 因此，这里略去计算过程，只给出结果.

4.2.1　周期边值条件与问题的解答

首先，由(4.2)，(4.3) 式，应用关于半平面的 Hilbert 核积分公式(1.60)，(1.61)，有

$$
\Phi(z_1) = \frac{1}{GN-MH}\,\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}(N\sigma_y(t) - \mathrm{i}H\tau_{xy}(t))\cot\frac{t-z_1}{a}\,\mathrm{d}t, \tag{4.15}
$$

$$
\Psi(z_2) = \frac{-1}{GN-MH}\,\frac{1}{2a\pi}\int_{L_0}(M\sigma_y(t) - \mathrm{i}G\tau_{xy}(t))\cot\frac{t-z_2}{a}\,\mathrm{d}t. \tag{4.16}
$$

考虑对

$$
\frac{\partial v}{\partial x} = C\Phi(z_1) + C\overline{\Phi(z_1)} + D\Psi(z_2) + D\overline{\Psi(z_2)}
$$

取边界值，由(4.15)，(4.16) 式，可以得到

$$
\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{y=0} = \frac{CN-DM}{GN-MH}\,\frac{1}{a\pi}\int_{L_0}\sigma_y(t)\cot\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t + \frac{DG-CH}{GN-MH}\tau_{xy}(x). \tag{4.17}
$$

然后，注意到运动压头情况的周期接触问题的动力弹性平衡在 L_0 上的

边值条件仍为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_y(x)=0,\ \tau_{xy}(x)=0,\quad x\in L_0-\gamma_0,\\&\frac{\partial v}{\partial x}=f'(x),\ \tau_{xy}(x)+\rho\sigma_y(x)=0,\quad x\in\gamma_0.\end{aligned}\right\}\tag{4.18}$$

其中 $y=f(x)$ 为压头基底的方程，$f'(x)$ 分段 $\in H$；并且已知在 γ_0 上的外应力主矢量为 $X+\mathrm{i}Y=(\rho-\mathrm{i})P_0$，现已假设摩擦力存在，$\rho$ 为摩擦系数（$\rho>0$ 或 <0 视 $w>0$ 或 $w<0$ 而定）.

如前一样，按(3.56)与(3.57)式，引入两个由 Hilbert 核积分表示的函数

$$w_1(z)=u_1-\mathrm{i}v_1,\quad w_2(z)=u_2-\mathrm{i}v_2.$$

因此，边值条件(4.18)可以由 $w_1(z),w_2(z)$ 的边值表示，亦即，注意到(4.17)式，

$$v_1^-(x)=0,\ v_2^-(x)=0,\quad x\in L_0-\gamma_0,$$

$$\frac{CN-DM}{GN-MH}u_1^-(x)+\frac{DG-CH}{GN-MH}v_1^-(x)=a\pi f'(x),\quad x\in\gamma_0.$$

再计及 $v_2^-(x)+\rho v_1^-(x)=0$，这样，对于 S^- 中的周期全纯函数 $w_1(z)$，在 L_0 上应满足边值条件

$$v_1^-(x)=0,\quad x\in L_0-\gamma_0,$$

$$u_1^-(x)+\rho\frac{CH-DG}{CN-DM}v_1^-(x)=\frac{GN-MH}{CN-DM}a\pi f'(x),\quad x\in\gamma_0.$$

这一边值问题就是下列关于半平面 S^- 的周期 Riemann-Hilbert 边值问题：要求一个在 S^- 内以 $a\pi$ 为周期的全纯函数 $w_1(z)=u_1-\mathrm{i}v_1$，在 L_0（以及周期合同线段）上满足条件

$$a(x)u_1^-(x)+b(x)v_1^-(x)=F(x),\quad x\in L_0,\tag{4.19}$$

其中

$$a(x)=\begin{cases}1,& x\in\gamma_0,\\0,& x\in\gamma_0';\end{cases}$$

$$b(x)=\begin{cases}\rho\dfrac{CH-DG}{CN-DM},& x\in\gamma_0,\\1,& x\in\gamma_0';\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{GN-MH}{CN-DM}a\pi f'(x),& x\in\gamma_0,\\0,& x\in\gamma_0'.\end{cases}$$

可以看到 $a(x),b(x),F(x)$ 均以 $x=-l$, $x=l$（及其周期合同点）为间断点. 这是如同第三章 3.2 节中出现的(3.61) 式那种类型的边值问题.

记

$$p=\frac{GN-MH}{CN-DM},\quad q=\frac{CH-DG}{CN-DM},\tag{4.20}$$

$$\theta=\frac{1}{\pi}\arctan pq,\quad |\theta|<\frac{1}{2},$$

如同(3.72) 式，现在

$$\begin{aligned}w_1(z)=&\pm \mathrm{i}\,e^{\pm\theta\pi\mathrm{i}}p\cos\theta\pi\, E(z)\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t\\&\pm \mathrm{i}\,e^{\pm\theta\pi\mathrm{i}}\left(C_1\tan\frac{z}{a}+C_2\right)E(z),\quad z\in S^{\pm},\end{aligned}\tag{4.21}$$

其中 C_1,C_2 为待定实常数，而 $E(z)$ 与 $E(t)$ 分别由(3.67) 与(3.69) 式给出（对 $t\in\gamma_0$, $E(t)\geqslant 0$).

由边界条件，我们还知道

$$w_2(z)=-\rho w_1(z)+\beta,\tag{4.22}$$

其中 β 也是一待定实常数.

我们所求的解为 $z\in S^-$ 时的(4.21) 式. 为要完全确定此解，还须确定实常数 C_1,C_2（附带地还有 β，虽然它在我们的解中不需要). 为此，要利用位移的周期性条件与弹性体在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的平衡条件.

4.2.2 位移周期性条件和弹性动态平衡条件

首先，讨论位移周期性条件，和上节的方法相似，$\Phi(z_1),\Psi(z_2)$ 可用 $w_1(z),w_2(z)$ 分别表示为

$$\Phi(z_1)=\frac{1}{2a\pi(GN-MH)}(Nw_1(z_1)-\mathrm{i}Hw_2(z_1)),$$

$$\Psi(z_2)=\frac{1}{2a\pi(GN-MH)}(Mw_1(z_2)-\mathrm{i}Gw_2(z_2)).$$

将上列两式代入位移周期性条件

$$[u+\mathrm{i}v]_{\Lambda_-}=0,$$

可以得到

$$(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\int_{\Lambda_-}w_1(z)\mathrm{d}z+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\int_{\Lambda_-}\overline{w_1(z)}\mathrm{d}z-2\mathrm{i}\eta a\pi\beta=0,\tag{4.23}$$

其中已令

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1&=\frac{1}{GN-MH}\{(A+C)N-(B+D)M\\&\quad+\mathrm{i}\rho[(A+C)H-(B+D)G]\},\\\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2&=\frac{1}{GN-MH}\{(A-C)N-(D-B)M\\&\quad+\mathrm{i}\rho[(A-C)H-(B-D)G]\},\\\eta&=\frac{AH-BG}{GN-MH}.\end{aligned}\right\}\tag{4.24}$$

而 Λ_- 的意义见图 2.6.

将 $w_1(z)$ 的表达式(4.21) 代入(4.23) 式，最后，得到如下的方程：

$$\begin{aligned}&\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2l\theta}{a}}+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\theta}{a}}\right]C_1\\&+\mathrm{i}\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2l\theta}{a}}-(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\theta}{a}}\right]C_2-\frac{2\mathrm{i}\eta\beta}{\cos\frac{l}{a}}\\&=-p\cos\pi\theta\left[(\varepsilon_1+\mathrm{i}\delta_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2l\theta}{a}}+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\delta_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2l\theta}{a}}\right]\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{4.25}$$

其中 $E(z)$ 如(3.67) 式所定义.

然后考虑在 $z=-\infty\mathrm{i}$ 处的平衡条件

$$P_0=\mathrm{Im}\,w_1(-\infty\mathrm{i}).$$

将 $w_1(z)$ 的表达式(4.21) 代入. 可以得到

$$C_2\cos\frac{2l\theta}{a}-C_1\sin\frac{2l\theta}{a}=\frac{P_0}{\cos\frac{l}{a}}+p\cos\pi\theta\sin\frac{2l\theta}{a}\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\mathrm{d}t.\tag{4.26}$$

因此，C_1，C_2 和 β 可由(4.25) 与(4.26) 两方程联立确定. 这样，本问题已完全解出.

4.2.3 压头正下方的压力

显然，压头正下方的压力分布为

$$p(x)=-\frac{1}{a\pi}\,\mathrm{Im}\,w_1^-(x),\quad x\in\gamma_0.\tag{4.27}$$

因此，再由(4.21) 式，

$$\begin{aligned}p(x)=&-\frac{p}{2}\sin2\pi\theta\,f'(x)+\frac{p\cos^2\pi\theta}{a\pi}E(x)\int_{\gamma_0}\frac{f'(t)}{E(t)}\cos\frac{t-x}{a}\,\mathrm{d}t\\&+\frac{\cos\pi\theta}{a\pi}E(x)\left(C_1\tan\frac{x}{a}+C_2\right),\quad x\in\gamma_0,\end{aligned}\tag{4.28}$$

其中 C_1, C_2 前已确定.

例　考虑按周期排列的运动压头有水平直基底的情况.

此时，$f'(x)=0$. 应用(4.28)式，可以得到压头正下方的压力分布为

$$p(x)=\frac{\cos\pi\theta}{a\pi}E(x)\left(C_1\tan\frac{x}{a}+C_2\right),\quad x\in\gamma_0,\tag{4.29}$$

其中 C_1, C_2 由下列两方程确定：

$$C_1\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cos\frac{2l\theta}{a}+(\delta_1-\delta_2)\sin\frac{2l\theta}{a}\right]$$
$$+C_2\left[(\delta_2-\delta_1)\cos\frac{2l\theta}{a}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sin\frac{2l\theta}{a}\right]=0,$$
$$C_1\sin\frac{2l\theta}{a}-C_2\cos\frac{2l\theta}{a}=-\frac{P_0}{\cos\frac{l}{a}}.$$

因此，解出 C_1, C_2，可以得到

$$p(x)=\frac{P_0\cos\pi\theta\,E(x)}{a\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cos\frac{l}{a}}\left\{\left[(\delta_1-\delta_2)\tan\frac{x}{a}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]\cos\frac{2l\theta}{a}\right.$$
$$\left.-\left[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\tan\frac{x}{a}-(\delta_1-\delta_2)\right]\sin\frac{2l\theta}{a}\right\}$$
$$\cdot\left(\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+\theta}\left(\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-\theta},\quad x\in\gamma_0.\tag{4.30}$$

本段上面所讨论的周期接触问题，都是假定压头与半平面之间在接触部分存在有摩擦力. 如无摩擦力，显然，只须在我们的讨论中令 $\rho=0$，即可得到所要求的结果.

例如，考虑每个按周期排列的运动压头有水平直基底的情况. 当无摩擦力时，在(4.30)式中令 $\rho=0$，得到压头正下方的压力分布为

$$p(x)=\frac{P_0}{a\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cos\frac{l}{a}}\frac{(\delta_1-\delta_2)\tan\frac{x}{a}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\left(\tan\frac{l}{a}-\tan\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tan\frac{l}{a}+\tan\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}},$$
$$x\in\gamma.\tag{4.31}$$

注 1　在上面所讨论的问题和结果中，若令 $\alpha\to+\infty$ 时，便回到一个压头的特殊情况. 所得结果与 Галин [1] 中的结果是一致的.

注 2　在上面的讨论中，都假定一个周期区间内只有一个压头，不难推广到有几个压头的情况.

第五章

弹性平面理论的周期裂纹问题

关于被无限个按周期排列的裂纹削弱的无限各向同性弹性平面的平衡问题，W. T. Koiter，F. Erdogan 等曾利用复变函数方法，对平面中具有直线周期裂纹，且裂纹位于和周期方向相同的同一直线上的情况，就第一基本问题进行研究. W. T. Koiter 以后对裂纹是直线形且垂直于周期方向的情况进行过研究，但仍是第一基本问题，且在边界外力以及两个无穷远处的应力非常特殊的假定下讨论的，其所用具体方法，显然不能应用到一般边值条件上去. 其后，В. В. Панасюк，А. П. Дацишин，和 М. П. Саврук 等对裂纹是直线形. 但其方位与周期方向有倾角 α 情况的第一基本问题，应用奇异积分方程理论进行了研究.

本章，首先在第二章 1.1 节的基础上，即假定周期应力在无穷远处是有界的，从而位移是准周期的条件下，对各向同性弹性平面中具有直线周期裂纹，且裂纹位于和周期方向相同的同一直线上的情况，就第一基本问题与第二基本问题进行讨论. 其次，将对具有任意形状和个数的周期裂纹问题进行研究，仍假定周期应力是有界的，从而位移是准周期的. 这里，是将此问题化为奇异积分方程，其中还应用了保形映射. 再次，考虑被无限个按周期排列的裂纹削弱的无限各向异性弹性平面的平衡问题，其中裂纹是直线形的，且均位于与周期方向相同的同一直线上. 这里就裂纹两侧总载荷相等互相抵消的情况进行讨论，将其化为周期 Riemann 边值问题.

5.1 被周期共线直裂纹削弱的无限各向同性弹性平面的基本问题

5.1.1 一些说明

考虑被周期直线裂纹削弱的无限各向同性弹性平面，其裂纹位于和周期

方向相同的同一直线上.

不失一般性，可设周期方向与 x 轴方向一致，周期裂纹都在 x 轴上，而在一个周期带 $|x|<\frac{1}{2}a\pi$ 内，有 n 条裂纹：

$$l_k:\ a_k\leqslant t\leqslant b_k\quad (a_{k+1}>b_k),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

自 a_k 到 b_k 的方向取作 l_k 的正向，记 $l_0=\sum_{k=1}^{n}l_k$，l_k 及其周期合同裂纹上的外应力主矢量记为 $X_k+\mathrm{i}Y_k$. 现在弹性域记作 S，其它记号与第二章相关记号同.

下面是在应力为周期的，且在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处有界，从而位移是准周期的假定下进行讨论.

对于上述特殊情况，应用 Н. И. Мусхелишвили 的方法类似地处理如下.

引进函数

$$\left.\begin{aligned}&\omega(z)=2\overline{\Phi}(z)+\overline{\Psi}(z),\\&\Omega(z)=\omega'(z)=\overline{\Phi}(z)+z\overline{\Phi}'(z)+\overline{\Psi}'(z),\end{aligned}\right\}\ z\in S.\tag{5.1}$$

这里 $\Phi(z),\Psi(z)$ 是复应力函数，且 $\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\overline{z})}$，$\overline{\Psi}(z)=\overline{\Psi(\overline{z})}$，易见

$$\sigma_y-\mathrm{i}\tau_{xy}=\Phi(z)+\Omega(\overline{z})+(z-\overline{z})\overline{\Phi'(z)},\quad z\in S.\tag{5.2}$$

由 $\Phi(z)$ 的周期性，可知 $\Omega(z)$ 也以 $a\pi$ 为周期.

在各 l_k 的端点附近，假定 $\Phi(z),\Omega(z)$ 至多有无界可积的奇异性，且

$$\lim_{z\to t}y\Phi'(z)=0\quad (z=x+\mathrm{i}y\in S,\ t\in l_0).\tag{5.3}$$

在 l_k(及其周期合同裂纹）上，显然

$$\left.\begin{aligned}X_k&=\int_{l_k}(\tau_{xy}^{-}(t)-\tau_{xy}^{+}(t))\mathrm{d}t,\\Y_k&=\int_{l_k}(\sigma_y^{-}(t)-\sigma_y^{+}(t))\mathrm{d}t,\end{aligned}\right\}\ k=1,2,\cdots,n,\tag{5.4}$$

其中 $\sigma_y^{\pm}+\mathrm{i}\tau_{xy}^{\pm}$ 分别表示在 l_k 上岸和下岸的应力. 于是

$$\left.\begin{aligned}X&=\int_{l_0}(\tau_{xy}^{-}(t)-\tau_{xy}^{+}(t))\mathrm{d}t,\\Y&=\int_{l_0}(\sigma_y^{-}(t)-\sigma_y^{+}(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

由(2.16)，(2.17) 式定义的 $\varphi_0'(z)=\Phi_0(z)$，$\psi_0'(z)=\Psi(z)$，已知 $\Phi_0(\pm\infty\mathrm{i})=\Psi_0(\pm\infty\mathrm{i})=0$[①]. 易于验证

① 在裂纹情况下，第二章中相应的公式仍成立，这是因为可用封闭曲线围住裂纹，而围线上外应力主矢量与裂纹上的相同.

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\pm\infty\mathrm{i}) &= \mp\frac{Y-\mathrm{i}X}{2a\pi(k+1)}+\beta,\\ \Psi(\pm\infty\mathrm{i}) &= \mp\frac{(\kappa-1)Y+\mathrm{i}(\kappa+1)X}{2a\pi(\kappa+1)}-\beta+\kappa\bar{\beta}-q;\end{aligned}\right\}\tag{5.6}$$

再从(5.1)式，可得

$$\Omega(\pm\infty\mathrm{i}) = \pm\frac{\kappa(Y-\mathrm{i}X)}{2a\pi(\kappa+1)}+\kappa\beta-q.\tag{5.7}$$

5.1.2 第一基本问题

设已知$\sigma_y^{\pm}(t),\tau_{xy}^{\pm}(t)$，且设它们都满足Hölder条件．又设$\sigma_-,\tau_-,h_-$，从而$\sigma_+,\tau_+,h_+,\beta,q$均已知，求弹性平衡．

根据边界条件，应用(5.2)式，可以推出(当$t\in l_0$及其周期合同的线段时，下同)

$$\Phi^+(t)+\Omega^-(t) = \sigma_y^+-\mathrm{i}\tau_{xy}^+,$$

$$\Phi^-(t)+\Omega^+(t) = \sigma_y^--\mathrm{i}\tau_{xy}^-.$$

将上两式相加与相减，我们的问题容易化为下列边值问题：

$$[\Phi(t)+\Omega(t)]^+ + [\Phi(t)+\Omega(t)]^- = 2p(t),\tag{5.8}$$

$$[\Phi(t)-\Omega(t)]^+ - [\Phi(t)-\Omega(t)]^- = 2q(t),\tag{5.9}$$

其中已令

$$p(t) = \frac{1}{2}(\sigma_y^+(t)+\sigma_y^-(t))-\frac{\mathrm{i}}{2}(\tau_{xy}^+(t)+\tau_{xy}^-(t)),\tag{5.10}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}(\sigma_y^+(t)-\sigma_y^-(t))-\frac{\mathrm{i}}{2}(\tau_{xy}^+(t)-\tau_{xy}^-(t)).\tag{5.11}$$

由(5.5)式知

$$\int_{l_0} q(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}(Y-\mathrm{i}X).\tag{5.12}$$

应用第一章中推广的 Plemelj 公式(1.15)，满足边值条件(5.9)的解为

$$\Phi(z)-\Omega(z) = \frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0} q(t)\cot\frac{t-z}{\alpha}\,\mathrm{d}t+2C,\tag{5.13}$$

其中C为某常数．

为了决定C，在(5.13)式中分别令$z\to\pm\infty\mathrm{i}$，相加并利用(5.6)，(5.7)两式，得到

$$C = \frac{1}{2}[q-(\kappa-1)\beta].\tag{5.14}$$

其次，应用第一章 §2 中非齐次周期 Riemann 边值问题的解答(详见路

见可[6])，可以求得满足边值条件(5.8)的在 h_0 类中的解为

$$\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{X(z)}{a\pi\mathrm{i}}\int_{L_0}\frac{p(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{\alpha}\,\mathrm{d}t+2X(z)P_n\left(\tan\frac{z}{\alpha}\right),\tag{5.15}$$

其中

$$P_n(\zeta)=C_0\zeta^n+C_1\zeta^{n-1}+\cdots+C_n\tag{5.16}$$

为 n 次任意多项式，而

$$X(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{z}{\alpha}-\tan\frac{a_k}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\tan\frac{z}{\alpha}-\tan\frac{b_k}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}},\tag{5.17}$$

其中根式可任意取定一连续分支，例如

$$\lim_{x\to\frac{a\pi}{2}}\tan^n\frac{z}{\alpha}X(z)=1.$$

将(5.13)与(5.15)两式相加减，这样，可以得到

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{l_0}\frac{p(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{l_0}q(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t\\&\quad+X(z)P_n\left(\tan\frac{z}{\alpha}\right)+C,\\\Omega(z)&=\frac{X(z)}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{l_0}\frac{p(t)}{X^+(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{l_0}q(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t\\&\quad+X(z)P_n\left(\tan\frac{z}{\alpha}\right)-C.\end{aligned}\right\}\tag{5.18}$$

剩下的问题是要确定 $C_0,C_1,\cdots,C_n$. 现在，如不计弹性体的整个平移，

$$2\mu(u(z)+\mathrm{i}v(z))=\kappa\varphi(z)-\omega(\overline{z})-(z-\overline{z})\,\overline{\Phi(z)}.$$

故当 t 在 l_0 上的正、负侧时，

$$2\mu(u^\pm(t)+\mathrm{i}v^\pm(t))=\kappa\varphi^\pm(t)-\omega^\pm(t),\quad t\in l_0.$$

当 t 沿 l_k 变动全程时，便得

$$\begin{aligned}2\mu[u^\pm(t)+\mathrm{i}v^\pm(t)]_{l_k}&=\kappa[\varphi^\pm(t)]_{l_k}-[\omega^\pm(t)]_{l_k}\\&=\kappa\int_{l_k}\Phi^\pm(t)\,\mathrm{d}t-\int_{l_k}\Omega^\pm(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因为 $u(z)$ 与 $v(z)$ 为单值的，且其正负侧边值在 a_k 和 b_k 处分别有相同值，故必

$$[u^+(t)+\mathrm{i}v^+(t)]_{l_k}=[u^-(t)+\mathrm{i}v^-(t)]_{l_k},$$

所以，

$$\kappa\int_{l_k}(\Phi^+(t)-\Phi^-(t))\mathrm{d}t+\int_{l_k}(\Omega^+(t)-\Omega^-(t))\mathrm{d}t=0,$$

$$k=1,2,\cdots,n, \qquad (5.19)$$

由此，可以得到关于 $C_0,C_1,\cdots,C_n$ 的 n 个线性方程.

此外，利用位移的准周期性，例如，取 Λ_+ 和 Λ_- 为图 2.6 中 z 到 $z+a\pi$ 的直线段，且取 $|z|$ 充分大趋于 $+\infty\mathrm{i}$ 和 $-\infty\mathrm{i}$，又可得到两个方程：

$$\begin{aligned}2\mu[u(z)+\mathrm{i}v(z)]_{\Lambda_\pm}&=\kappa\,[\varphi(z)]_{\Lambda_\pm}-[\omega(z)]_{\Lambda_\pm}\\&=\kappa\int_{\Lambda_\pm}\Phi(z)\mathrm{d}z-\int_{\Lambda_\mp}\Omega(z)\mathrm{d}z\\&=a\pi q,\end{aligned} \qquad (5.20)$$

其中 q 由(2.29)式确定.

由位移的单值性，立刻可以知道(5.20)中的一个方程立即可以从另一个推出，只要考虑 z 沿图 2.6 中的矩形变动一周时位移增量为 0 即可. 因此，(5.19),(5.20)中恰有 $n+1$ 个独立的方程，这就正好用来确定 $C_0,C_1,\cdots,C_n$（它们的惟一可解性，从力学观点来看是很明显的）. 问题至此已完全解决.

作为一个特殊情况，考虑 $n=1$ 的情形：在一个周期中，设只有一条裂纹 γ_0：$-l\leqslant t\leqslant l\ \left(0<l<\frac{a\pi}{2}\right)$. 此时，(5.18)式成为

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}p(t)\sqrt{R(t)}\cot\frac{t-z}{a}\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}q(t)\cot\frac{t-z}{a}\mathrm{d}t+\frac{C_0\tan\frac{z}{a}+C_1}{\sqrt{R(z)}}+C,\\\Omega(z)&=\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}p(t)\sqrt{R(t)}\cot\frac{t-2}{a}\mathrm{d}t\\&\quad-\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}q(t)\cot\frac{t-z}{a}\mathrm{d}t+\frac{C_0\tan\frac{z}{a}+C_1}{\sqrt{R(z)}}-C,\end{aligned}\right\} \qquad (5.18)'$$

其中

$$R(z)=\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z}{a}, \qquad (5.21)$$

且 $\sqrt{R(z)}$ 在用周期裂纹剖开的 z 平面中，例如可取定这样的一个分支：

$$\lim_{z\to\pm\infty\mathrm{i}}\sqrt{R(z)}=\pm1\Big/\cos\frac{l}{a}, \qquad (5.22)$$

或即，当 z 在上半平面趋于 $t \in \gamma_0$ 时，$\sqrt{R(z)}$ 取正值的那一分支，亦即，在(5.18)′中，$\sqrt{R(t)}$ 要理解为取正值.

为了确定 C_0, C_1，最简单的方法是：在(5.18)′的第一式中以 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 代入，并相加相减，再以(5.6)，(5.12)，(5.14)代入，计及(2.19)式，即可得到

$$C_0=-\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l} p(t)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t-\frac{(\tau_-+\tau_+)+\mathrm{i}(\sigma_-+\sigma_+)}{4\cos\dfrac{l}{a}}, \tag{5.23}$$

$$C_1=\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\,\frac{Y-\mathrm{i}X}{4a\pi\cos\dfrac{l}{a}}. \tag{5.24}$$

特别地，设 $X=Y=0$，而记 $\sigma_\infty=\sigma_\pm$，$\tau_\infty=\tau_\pm$，$h_\infty=h_\pm$，这时，由(2.23)与(2.22)，便得

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\frac{1}{4}(h_\infty+\sigma_\infty)-\frac{\mathrm{i}\tau_\infty}{\kappa+1},\\ q&=\frac{\kappa+1}{4}h_\infty-\frac{3-\kappa}{4}\sigma_\infty.\end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

代入(5.14)，(5.23)，(5.24)式后，由(5.18)′式，最后可以得到

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)&=-\frac{(\tau_\infty+\mathrm{i}\sigma_\infty)\sin\dfrac{z}{a}}{2\sqrt{\sin\dfrac{l+z}{a}\sin\dfrac{l-z}{a}}}+\frac{h_\infty-\sigma_\infty}{4}+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\,\frac{\mathrm{i}\tau_\infty}{2},\\ \Omega(z)&=-\frac{(\tau_\infty+\mathrm{i}\sigma_\infty)\sin\dfrac{z}{a}}{2\sqrt{\sin\dfrac{l+z}{a}\sin\dfrac{l-z}{a}}}-\frac{h_\infty-\sigma_\infty}{4}-\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\,\frac{\mathrm{i}\tau_\infty}{2},\end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

其中根式要这样理解：在如前剖开的平面中，当 z 从上半平面趋于 $t\in\gamma_0$ 时取正值.

容易看出，如要求位移是周期的时，即 $q=0$，则由(5.25)式，应令

$$h_\infty=\frac{3-\kappa}{\kappa+1}\sigma_\infty.$$

这一点可如此理解：当 $\sigma_\infty>0$ 时，即在和周期方向作垂直的拉伸时，为了要保持位移的周期性，必须在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处作和周期方向一致的拉伸，且其强度为原拉伸强度的 $\dfrac{3-\kappa}{\kappa+1}$ (>0) 倍.

如果在(5.26)式中令 $a\to+\infty$，则可得到全平面只有一个水平裂纹时的下列公式：

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi(z) &= -\frac{(\tau_\infty + \mathrm{i}\sigma_\infty)z}{2\sqrt{l^2 - z^2}} + \frac{h_\infty - \sigma_\infty}{4} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\frac{\mathrm{i}\tau_\infty}{2},\\
\Omega(z) &= -\frac{(\tau_\infty + \mathrm{i}\sigma_\infty)z}{2\sqrt{l^2 - z^2}} - \frac{h_\infty - \sigma_\infty}{4} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\frac{\mathrm{i}\tau_\infty}{2},
\end{aligned}\right\} \tag{5.26$'$}
$$

其中当 z 从上半平面趋于 $t \in \gamma_0$ 时，根式取正值. 不难验证，如果不计刚性旋转，此结果与 Н. И. Мусхелишвили 的结果是一致的.

这个周期问题，当 $n = 1$ 时，曾为 W. T. Koiter 所研究，但是，只是在裂纹上无外应力情况下得到解答的.

5.1.3 第二基本问题

可类似上述方法进行求解. 为简单计，下面只考虑在一周期内只含一条裂纹 $\gamma_0 = [-l, l]$ 的情况. 此问题是：

设已知 γ_0 上下岸位移分别为 $u^\pm(t) + \mathrm{i}v^\pm(t)$，且其导数 $(u^\pm(t))' + (v^\pm(t))'$ 以 $\alpha\pi$ 为周期，满足 Hölder 条件. 在 γ_0 上的外应力主矢量 $X + \mathrm{i}Y$ 也已知，又已知 $z = -\infty\mathrm{i}$（从而 $z = +\infty\mathrm{i}$）处的应力. 求弹性平衡.

已见

$$2\mu(u + \mathrm{i}v) = \kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\overline{\Phi(z)}.$$

为了不必直接考虑可能为多值的函数 $\varphi(z), \omega(z)$，我们在形成边值条件时不从上式出发，而从先对上式就 x 求偏导数，得到

$$2\mu(u' + \mathrm{i}v') = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \tag{5.27}$$

其中 u', v' 分别为 u, v 对 x 的偏导数.

对(5.27)式两端令 z 分别从 γ_0 的上、下岸在 t 点处取边值，则有

$$\kappa\Phi^+(t) - \Omega^-(t) = 2\mu(u^{+\prime}(t) + \mathrm{i}v^{+\prime}(t)),$$
$$\kappa\Phi^-(t) - \Omega^+(t) = 2\mu(u^{-\prime}(t) + \mathrm{i}v^{-\prime}(t)).$$

将此两式相加与相减，可以得到边值条件：

$$
\begin{aligned}
&[\kappa\Phi(t) - \Omega(t)]^+ + [\kappa\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 2f(t), \quad t \in \gamma_0,\\
&[\kappa\Phi(t) + \Omega(t)]^+ - [\kappa\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 2g(t), \quad t \in \gamma_0,
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

其中 $f(t), g(t)$ 为 γ_0 上的已知函数：

$$f(t) = \mu[(u^+ + u^-)' + \mathrm{i}(v^+ + v^-)'],$$
$$g(t) = \mu[(u^+ - u^-)' + \mathrm{i}(v^+ - v^-)'].$$

显然，$f(t), g(t)$ 在 γ_0 上满足 Hölder 条件.

这样，可以求得

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi(z) = {} & \frac{1}{2a\pi\kappa\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l} f(t)\sqrt{R(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2a\pi\kappa\mathrm{i}}\int_{-l}^{l} g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t + \frac{C_0\tan\dfrac{z}{a}+C_1}{\kappa\sqrt{R(z)}} \\
& + \beta - \frac{q}{2\kappa}, \\
\Omega(z) = {} & -\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l} f(t)\sqrt{R(t)}\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l} g(t)\cot\frac{t-z}{a}\,\mathrm{d}t - \frac{C_0\tan\dfrac{z}{a}+C_1}{\sqrt{R(z)}} \\
& + \kappa\beta - \frac{q}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.29}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
C_0 &= -\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l} f(t)\sqrt{R(t)}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{i}q}{2\cos\dfrac{l}{a}}, \\
C_1 &= -\frac{\kappa(Y-\mathrm{i}X)}{2(\kappa+1)a\pi\cos\dfrac{l}{a}}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.30}
$$

这问题($n=1$ 时)，H. F. Bueckner 曾有不够完全的讨论.

注　对周期混合问题，也可用类似方法求解，这里就不写出具体结果了.

5.2　被任意形状周期裂纹削弱的各向同性弹性平面的基本问题

5.2.1　一般说明

设各向同性无限弹性平面中存在无限个任意形状的、按周期排列的裂纹，其周期为 $a\pi$.

考虑一个周期带 $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}a\pi$，设其内含有 p 个互不相交的曲线裂纹 $L_k = \widehat{a_k b_k}$，$k = 1,2,\cdots,p$，并取定自 a_k 到 b_k 为正向；它们都有满足 α 阶 Hölder 条件的曲率 $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$. 记 $L_0 = \sum_{k=1}^{p} L_k$. 在周期合同的位置处有同样形

状的裂纹，它们的并记为 L.

下面在应力为周期有界，从而位移是准周期的假定下展开讨论，即

$$2\mu(u(z+a\pi)-u(z))=2\pi q,\quad v(z+a\pi)=v(z),$$

其中 q 为某一确定的实常数.

以 $X_k^{\pm}+\mathrm{i}Y_k^{\pm}$ 分别表示在 L_k 上正、负侧边界上的应力主矢量：

$$X_k^{\pm}+\mathrm{i}Y_k^{\pm}=\int_{L_k}(X_n^{\pm}+\mathrm{i}Y_n^{\pm})\mathrm{d}s,\quad k=1,2,\cdots,p \tag{5.31}$$

（n 为 L_k 上的法线方向，s 为弧长参数），而记 L_k 两侧上应力主矢量的和为

$$X_k+\mathrm{i}Y_k=(X_k^{+}+X_k^{-})+\mathrm{i}(Y_k^{+}+Y_k^{-}),$$

则整个 L 上的应力合主矢量为

$$X+\mathrm{i}Y=\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k).$$

现在，讨论应力函数 $\varphi(z),\psi(z)$ 的一般表达式.

为了分离出它们的多值部分，令

$$\zeta_k(z)=\frac{\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}z}{a}}-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}a_k}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}z}{a}}-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}b_k}{a}}}}+1}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}z}{a}}-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}a_k}{a}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}z}{a}}-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}b_k}{a}}}}-1}\quad(1\leqslant k\leqslant p). \tag{5.32}$$

这一函数把以 L_k 为剖线的带形 $|\operatorname{Re}z|<\dfrac{a\pi}{2}$ 单叶保形映射到 ζ_k 平面中某有界单连区域（原点在其内）的外部，如果其中根式已取定这样的一支：当 $z\to-\infty\mathrm{i}$ 时，根式趋于 $+1$，在带形中每一绕过 L_k 的简单闭路映成绕过 $\zeta_k=0$ 的一简单闭路，且方向保持不变. 注意这时 $\zeta_k(+\infty\mathrm{i})$ 有限，而 $\zeta_k(-\infty\mathrm{i})=\infty$. 于是，可用多值周期函数

$$Z_k(z)=\log\zeta_k(z) \tag{5.33}$$

来替代(2.8),(2.9)两式中的 $\log\sin\dfrac{z-z_k}{a}$，这里，对数已任意取定一支，但 z 平面的剖线为：联结 $-\infty\mathrm{i}$ 到 a_k，再沿 L_k 到 b_k（以及所有其周期合同曲线）. 注意

$$Z_k'(z)=\frac{\zeta_k'(z)}{\zeta_k(z)}=\frac{\dfrac{2\mathrm{i}}{a}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}z}{a}}}{\sqrt{\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}z}{a}}-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}a_k}{a}}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}z}{a}}-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}b_k}{a}}\right)}}, \tag{5.34}$$

其中根号要这样理解：当 $z \to -\infty \mathrm{i}$ 时它趋于 $+\infty$，或即

$$Z'_k(+\infty \mathrm{i}) = 0, \quad Z'_k(-\infty \mathrm{i}) = \frac{2i}{a}. \tag{5.35}$$

除剖线 L_k 及其周期合同曲线外，$Z'_k(z)$ 全纯，以 $a\pi$ 为周期，且连续到 L_k 的两侧，但在端点 a_k, b_k 处有 $\frac{1}{2}$ 阶的奇异性.

于是，类似于第二章 2.1 节对应力函数的讨论，我们便有下列一般表达式：

$$\begin{aligned}\varphi(z) = &-\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k)Z_k(z)\\&+\varphi_0(z)+\beta z,\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}\psi(z) = &\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k-\mathrm{i}Y_k)Z_k(z)\\&+\frac{z}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k)Z'_k(z)\\&-z\varphi'_0(z)+\psi_0(z)+(\kappa\bar{\beta}-\beta-q)z,\end{aligned} \tag{5.37}$$

其中 $\varphi_0(z), \psi_0(z)$ 为弹性域内的周期全纯函数，且在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处有界. 由此，还有

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k)Z'_k(z)+\Phi_0(z)+\beta, \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}\Psi(z) = &\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k-\mathrm{i}Y_k)Z'_k(z)\\&+\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k)(Z'_k(z)+zZ''_k(z))\\&-\Phi_0(z)-z\Phi'_0(z)+\Psi_0(z)+(\kappa\bar{\beta}-\beta-q),\end{aligned} \tag{5.39}$$

其中已令 $\Phi_0(z)=\varphi'_0(z)$，$\Psi_0(z)=\psi'_0(z)$.

5.2.2　无穷远处应力的讨论

现在有两个无穷远点：$z=\pm\infty\mathrm{i}$. 首先注意，除(5.35)外，还易于证明

$$\lim_{z\to\pm\infty\mathrm{i}} zZ''_k(z) = 0. \tag{5.40}$$

其次，既然在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处应力有界，类似第二章 2.1 节的讨论，有

$$\Phi_0(\pm\infty\mathrm{i}) = \Psi_0(\pm\infty\mathrm{i}) = 0, \tag{5.41}$$

因此，由于

$$\lim_{z \to \pm\infty i} z\Phi'(z) = 0,$$

将(5.38)式求导，计及(5.40)，即知

$$\lim_{z \to \pm\infty i} z\Phi_0'(z) = 0. \tag{5.42}$$

把上面的结果代入(5.38)和(5.39)两式，可以得知：

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi(+\infty i) = \beta, \\
&\Phi(-\infty i) = \frac{Y - iX}{a\pi(\kappa+1)} + \beta, \\
&\Psi(+\infty i) = \kappa\bar{\beta} - \beta - q, \\
&\Psi(-\infty i) = \frac{(\kappa-1)Y + i(\kappa+1)X}{a\pi(\kappa+1)} + \kappa\bar{\beta} - \beta - q.
\end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

如前，用 $\sigma_\pm, \tau_\pm, h_\pm$ 分别表示在 $z = \pm\infty i$ 处 $\sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_x$ 的值. 由(5.43)以及用 $\varphi(z), \psi(z)$ 表示应力的基本表达式，有

$$\left.\begin{aligned}
h_+ + i\tau_+ &= 2\bar{\beta} - (\kappa-1)\beta + q, \\
h_- + i\tau_- &= \frac{(3-\kappa)Y + i(\kappa+1)X}{a\pi(\kappa+1)} \\
&\quad + 2\bar{\beta} - (\kappa+1)\beta + q;
\end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_+ + i\tau_+ &= (\kappa+1)\bar{\beta} - q, \\
\sigma_- + i\tau_- &= \frac{Y + iX}{a\pi} + (\kappa+1)\bar{\beta} - q.
\end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

于是

$$\sigma_- - \sigma_+ = \frac{Y}{a\pi}, \quad \tau_- - \tau_+ = \frac{X}{a\pi}, \tag{5.46}$$

$$h_- - h_+ = \frac{3-\kappa}{\kappa+1}\frac{Y}{a\pi}, \tag{5.47}$$

$$q = \frac{1}{4}[(\kappa+1)h_+ - (3-\kappa)\sigma_+] = \frac{1}{4}[(\kappa+1)h_- - (3-\kappa)\sigma_-]. \tag{5.48}$$

这些均与第二章 2.1 节中的讨论一致.

计算 β 时，不能直接引用第二章中的公式，因为在这里 $\Phi(\pm\infty i)$ 等的值与那里的已不相同. 将(5.48)代入(5.45)，可以得到

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{h_+ + \sigma_+}{4} - i\frac{\tau_+}{\kappa+1} - \frac{Y - iX}{a\pi(\kappa+1)} \\
&= \frac{h_- + \sigma_-}{4} - i\frac{\tau_-}{\kappa+1} - \frac{Y - iX}{a\pi(\kappa+1)}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

但这些式子也可如那里一样直接导出，只要考虑闭路 $\Gamma_k (k = 1, 2, \cdots, p)$

围住 L_k，但使其它 $L_j(j\neq k)$ 在其外.

5.2.3　第一基本问题

现在假定周期裂纹两侧上周期外应力 $X_n^{\pm}(t)+\mathrm{i}Y_n^{\pm}(t)$ $(t\in L)$ 已知，并设它满足条件 H^*. 一函数 $F(t)\in H^*$ 于一开口弧 γ 上是指：

$$F(t)=\frac{F^*(t)}{|t-c|^{\alpha}},\quad t\in\gamma,\ 0<\alpha<1,$$

其中 c 为 γ 的端点(即 $c=a$ 或 b)，且 $F^*(t)\in H$. 此外，还假定，例如，在 $z=+\infty\mathrm{i}$ 处的应力 σ_+,τ_+,h_+ 也已知(从而 $\sigma_-,\tau_-,h_-,\beta,q$ 均已知). 求弹性平衡.

令

$$\left.\begin{aligned}&f^+(t)=f_j^+(t)=\mathrm{i}\int_{a_j}^{t}(X_n^++\mathrm{i}Y_n^+)\mathrm{d}s,\\&f^-(t)=f_j^-(t)=\mathrm{i}\int_{a_j}^{b}(X_n^++\mathrm{i}Y_n^+)\mathrm{d}s+\mathrm{i}\int_t^b(X_n^-+\mathrm{i}Y_n^-)\mathrm{d}s,\end{aligned}\right\}$$

$$t\in L_j,\ j=1,2,\cdots,p,\qquad(5.50)$$

其中积分都是沿 L_j 进行；它们都是可延展为 L（所有裂纹）上的函数，以 $a\pi$ 为周期.

这样，与(2.35)式相仿，本问题是要求解下列周期边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi^+(t)+t\overline{\varphi'^+(t)}+\overline{\psi^+(t)}=f^+(t)+C(t),\\&\varphi^-(t)+t\overline{\varphi'^-(t)}+\overline{\psi^-(t)}=f^-(t)+C(t),\end{aligned}\right\}\ t\in L,\qquad(5.51)$$

这里 $C(t)$ 在每一 L_j 及其周期合同裂纹上均为常数，但一般说来，$C(t+a\pi)\neq C(t)$，$t\in L$. 事实上，由(5.36)，(5.37)两式，易见

$$\varphi(z+a\pi)-\varphi(z)=a\pi\beta,$$

$$\psi(z+a\pi)-\psi(z)=\frac{a}{2(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)Z_j'(z)-a\pi\varphi_0'(z)+(\kappa\overline{\beta}-\beta-q)a\pi,$$

因而，由(5.51)立即可以看出，$C(t)$ 是准周期的：

$$C(t+a\pi)-C(t)=a\pi[(\kappa+1)\beta-q]=a\pi(\sigma_+-\mathrm{i}\tau_+).\qquad(5.52)$$

现将(5.36)，(5.37)两式代入(5.51)式中，这样，可将边值问题(5.51)化为下列关于周期全纯函数 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 的边值问题

$$\varphi_0^{\pm}(t)+(t-\overline{t})\overline{\varphi_0'^{\pm}(t)}+\overline{\psi_0^{\pm}(t)}=f_0^{\pm}(t)+\nu(t),\quad t\in L,\qquad(5.53)$$

这里已令

$$f_0^{\pm}(t) = f^{\pm}(t) + \frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j + \mathrm{i}Y_j)(Z_j^{\pm}(t) - \kappa\overline{Z_j^{\mp}(t)})$$
$$+ \frac{t-\bar{t}}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j - \mathrm{i}Y_j)\,\overline{Z_j'^{\pm}(t)}, \tag{5.54}$$

而

$$\nu(t) = C(t) - (\beta+\bar{\beta})t - (\kappa\beta - \bar{\beta} - q)\bar{t}$$
$$= C(t) - \frac{h_+ + \sigma_+}{2}t + \left(\frac{h_+ - \sigma_+}{2} + \mathrm{i}\tau_+\right)\bar{t}. \tag{5.55}$$

由(5.52)式，显然 $\nu(t)$ 已是以 $a\pi$ 为周期的函数.

不妨设(这只会影响弹性体的刚性平移，而不会影响应力分布)

$$\varphi_0(-\infty\mathrm{i}) = \psi_0(-\infty\mathrm{i}) = 0, \tag{5.56}$$

而 $\varphi_0(+\infty\mathrm{i}),\psi_0(+\infty\mathrm{i})$ 均有限. 这样，我们要求解周期边值问题(5.53)，并满足附加条件(5.56).

这里暂时假定 $\varphi_0^{\pm}(t)\in H$，$\varphi_0'^{\pm}(t),\psi_0^{\pm}(t)\in H^*$（以后可以证实这些假定是成立的).

作保形映射

$$w = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}z}{a}},\quad 即\ z = \frac{a}{2\mathrm{i}}\log w \tag{5.57}$$

(当 $t\in L_0$ 时，记 $\tau = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}t}{a}}$，亦即 $t = \frac{a}{2\mathrm{i}}\log\tau$，$|\arg\tau| < \pi$)，则弹性平面映成 w 平面，$z = +\infty\mathrm{i}$ 映于 $w = 0$，$z = -\infty\mathrm{i}$ 映于 $w = \infty$. 记

$$\alpha_j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}a_j}{a}},\ \beta_j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}b_j}{a}}\quad (j = 1,2,\cdots,p),$$

$\Gamma_j = \widehat{\alpha_j\beta_j}$ 为 Γ_j 的象，$\Gamma = \sum_{j=1}^{p}\Gamma_j$. 这时 $\varphi_0(z),\psi_0(z)$ 分别成为 w 平面上以 Γ 为跳跃曲线的分区全纯函数：

$$\varphi_0^*(w) = \varphi_0\left(\frac{a}{2\mathrm{i}}\log w\right),\quad \psi_0^*(w) = \psi_0\left(\frac{a}{2\mathrm{i}}\log w\right), \tag{5.58}$$

它们以 Γ 为跳跃曲线. 此外，

$$\varphi_0^{\pm\prime}(t) = \varphi_0^{*\pm\prime}(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{2\mathrm{i}}{a}\tau\varphi_0^{*\prime\pm}(\tau).$$

如记 $C(t)$ 在 L 上的值为 $C_0(t)$，即 $C_0(t) = C_j$，$i\in L_j$ $(j = 1,2,\cdots,p)$. 现在又可记 $C_0^*(\tau) = C_0(t)$，亦即 $C_0^*(\tau) = C_j$，$\tau\in\Gamma_j$ $(j = 1,2,\cdots,p)$. 注意到(5.55)式，于是(5.53)式成为

$$\varphi_0^{*\pm}(\tau) - 2\bar{\tau}\ln|\tau|\overline{\varphi_0^{*'\pm}(\tau)} + \overline{\psi_0^{*\pm}(\tau)}$$
$$= f_0^{*\pm}(\tau) - \frac{a}{2}[(\tau_+ - \mathrm{i}h_+)\ln|\tau| + (\sigma_+ - \mathrm{i}\tau_+)\arg\tau]$$
$$+ C_0^*(\tau), \quad \tau\in\Gamma \quad (|\arg\tau| < \pi), \tag{5.59}$$

其中

$$f_0^{*\pm}(\tau) = f_0^{\pm}\left(\frac{2\mathrm{i}}{a}\log\tau\right)$$
$$= f^{\pm}\left(\frac{2\mathrm{i}}{a}\log\tau\right) + \frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k + \mathrm{i}Y_k)(Z_k^{*\pm}(\tau) - \kappa\overline{Z_k^{*\pm}(\tau)})$$
$$- \frac{\bar{\tau}\ln|\tau|}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k - \mathrm{i}Y_k)\overline{Z_k^{*'\pm}(\tau)}, \tag{5.60}$$

这里

$$Z_k^*(w) = \log\zeta_k^*(w),$$

而

$$\zeta_k^*(w) = \left(\sqrt{\frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k}} + 1\right)\Bigg/\left(\sqrt{\frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k}} - 1\right),$$

其中根式、对数的单值支前面已一意取定($w=\infty$时，根式的值为$+1$). 又这时(5.56) 成为

$$\varphi_0^*(\infty) = \psi_0^*(\infty) = 0. \tag{5.61}$$

还要注意，在 $w=0$ 处现在 $\varphi_0^*(w)$,$\psi_0^*(w)$ 均保持有界，因为 Γ 不通过点 $w=0$.

这样，我们的问题就化为 w 平面上(以 Γ 为跳跃曲线) 的边值问题(5.59)，且要求满足附加条件(5.61)；由假设，且有 $\varphi_0^*\in H$，$\varphi_0^{*'}$,$\psi_0^*\in H^*$.

边值条件(5.59) 还可改写为

$$\left.\begin{aligned}
&(\overline{\varphi_0^{*+}(\tau)} - \overline{\varphi_0^{*-}(\tau)}) - 2\tau\ln|\tau|(\varphi_0^{*+}(\tau) - \varphi_0^{*-'}(\tau))\\
&\quad + (\psi_0^{*+}(\tau) - \psi_0^{*-}(\tau))\\
&= F_0^*(\tau),\\
&(\overline{\varphi_0^{*+}(\tau)} + \overline{\varphi_0^{*-}(\tau)}) - 2\tau\ln|\tau|(\varphi_0^{*+'}(\tau) - \varphi_0^{*-'}(\tau))\\
&\quad + (\psi_0^{*+}(\tau) + \psi_0^{*-}(\tau))\\
&= G_0^*(\tau) - a[(\tau_+ + \mathrm{i}h_+)\ln|\tau| + (\sigma_+ + \mathrm{i}\tau_+)\arg\tau] + 2\overline{C_0^*(\tau)},
\end{aligned}\right\}$$
$$\tau\in\Gamma, \tag{5.62}$$

这里，当 $\tau\in\Gamma_j$ 时，

$$\left.\begin{aligned}
F_0^*(\tau) &= \overline{F_j^*(\tau)} - \frac{2\tau\ln|\tau|}{\pi(\kappa+1)}\frac{X_j+\mathrm{i}Y_j}{\sqrt{(\tau-\alpha_j)(\tau-\beta_j)}},\\
G_0^*(\tau) &= \overline{f_j^{*+}(\tau)} + \overline{f_j^{*-}(\tau)}\\
&\quad + \frac{1}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k\neq j}(X_k-\mathrm{i}Y_k)(\overline{Z_k^{*+}(\tau)} - kZ_k^{*-}(\tau))\\
&\quad - \frac{2\tau\ln|\tau|}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k\neq j}\frac{X_k+\mathrm{i}Y_k}{\sqrt{(\tau-\alpha_k)(\tau-\beta_k)}},
\end{aligned}\right\} \quad (5.63)$$

其中已令

$$\begin{aligned}
&F^*(\tau) = F_j^*(\tau)\\
&= f_j^{*+}(\tau) - f_j^{*-}(\tau) + \frac{X_j+\mathrm{i}Y_j}{\pi(\kappa+1)}(Z_j^{*+}(\tau) - \kappa\overline{Z_j^{*-}(\tau)}), \quad \tau\in\Gamma_j.
\end{aligned}$$

在(5.63)式中的$\sqrt{(\tau-\alpha_k)(\tau-\beta_k)}$应理解为

$$\sqrt{(w-\alpha_k)(w-\beta_k)} = (w-\beta_k)\sqrt{\frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k}}$$

当 w 在 Γ_k 的正侧趋于其上一点 τ 时的极限值.

由于对 $X_k^\pm(t)+\mathrm{i}Y_k^\pm(t)$ 的假设，易见 $f_j^{*\pm}(\tau)\in H$，$f_j^{*\pm\prime}(\tau)\in H^*$，且由(5.50)式，易于推出

$$\lim_{x\to\alpha_j}F_j^*(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to\beta_j}F_j^*(\tau) = 0, \quad j=1,2,\cdots,p.$$

注意，利用

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \frac{\tau\ln|\tau|\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{(\tau-\alpha_j)(\tau-\beta_j)}(\tau-\tau_0)}\\
&= \int_\Gamma \frac{\tau\ln|\tau| - \tau_0\ln|\tau_0|}{\sqrt{(\tau-\alpha_j)(\tau-\beta_j)}(\tau-\tau_0)}\mathrm{d}\tau\\
&\quad + \tau_0\ln|\tau_0|\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{(\tau-\alpha_j)(\tau-\beta_j)}(\tau-\tau_0)},
\end{aligned}$$

易于证明：在 $\tau_0=\alpha_j,\beta_j$ 附近，这积分 $\in H$，其导数 $\in H^*$ (参看路见可[6]或 Мусхелишвили [2]). 因此，如令

$$\varphi_0^*(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{\overline{\rho(\tau)}}{\tau-w}\mathrm{d}\tau, \tag{5.64}$$

其中 $\rho(\tau)\in H$ 是新的未知函数. 可以证明，$\rho'(\tau)\in H^*$，且

$$\rho(\alpha_j) = \rho(\beta_j) = 0, \quad j=1,2,\cdots,p.$$

这样，可将边值问题(5.62) 转化为下一奇异积分方程

$$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\rho(\tau)\mathrm{d}\log\frac{\overline{\tau}-\overline{\tau_0}}{\tau-\tau_0}$$
$$+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\overline{\rho(\tau)}\,\mathrm{d}\frac{\tau\ln|\tau|-\tau_0\ln|\tau_0|}{\tau-\tau_0}$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{F_0^*(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}G_0^*(\tau_0)+\frac{a}{2}[(\tau_++\mathrm{i}h_+)\ln|\tau_0|$$
$$+(\sigma_++\mathrm{i}\tau_+)\arg\tau_0]-\overline{C_0^*(\tau)},\quad \tau\in\Gamma, \tag{5.65}$$

其右端 $\in H$，且有导数 $\in H^*$. 或者，把左端最后的积分改写一下，并改换一下 $C_0^*(\tau)$，奇异积分方程(5.65)又可改写为下面的形式：

$$\boldsymbol{K}_1\rho\equiv\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\rho(\tau)\mathrm{d}\log\frac{\overline{\tau}-\overline{\tau_0}}{\tau-\tau_0}$$
$$+\frac{\tau_0}{\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\overline{\rho(\tau)}\,\mathrm{d}\frac{\ln|\tau|-\ln|\tau_0|}{\tau-\tau_0}$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{F_0^*(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}G_0^*(\tau_0)+\frac{a}{2}[(\tau_++\mathrm{i}h_+)\ln|\tau_0|$$
$$+(\sigma_++\mathrm{i}\tau_+)\arg\tau_0]-C_1^*(\tau_0), \tag{5.66}$$

易于看出，方程(5.66)左端第二项是 Fredholm 核的积分. 今说明第三项也是的，因为

$$\mathrm{d}\frac{\log\tau-\log\tau_0}{\tau-\tau_0}=-\frac{\log\tau-\log\tau_0-\frac{1}{\tau}(\tau-\tau_0)}{(\tau-\tau_0)^2}\mathrm{d}\tau,$$

当 $\tau\to\tau_0$ 时，右端 $\mathrm{d}\tau$ 的系数趋于$\frac{1}{2\tau_0^2}$，又

$$\mathrm{d}\frac{\log\overline{\tau}-\log\overline{\tau_0}}{\tau-\tau_0}=\frac{\overline{\tau}-\overline{\tau_0}}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\overline{\left(\frac{\log\tau-\log\tau_0}{\tau-\tau_0}\right)}+\overline{\left(\frac{\log\tau-\log\tau_0}{\tau-\tau_0}\right)}\mathrm{d}\left(\frac{\overline{\tau}-\overline{\tau_0}}{\tau-\tau_0}\right).$$

将上面两式相加，可推出我们的论断.

因此，方程(5.66)为一正则型奇异积分方程，要求在 h_{2p} 类中求解，亦即要求解必须在 Γ 的所有端点处有界(术语见前述文献).

首先指出在现在的情况下，应用与 Н. И. Мусхелишвили 相类似的方法，不难证明弹性平面的第一和下段中的第二基本问题解的存在和唯一性定理仍成立. 其次，由于 Γ 仍有与 L_0 相似的性质，因此，不难证明，在方程(5.66)中诸常数 $C_0^*(\tau_0)=C_j^*$，$\tau_0\in\Gamma_j$，$j=1,2,\cdots,p$，适当地一意选定后，它有唯一解 $\rho(\tau)$. 再通过(5.64)，即可求出 $\varphi_0^*(w)$；而 $\psi_0^*(w)$ 可由下式算出：

$$\psi_0^*(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}(\rho(\tau)-2\tau\ln|\tau|\overline{\rho(\tau)'})\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-w}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{F_0^*(\tau)}{\tau-w}\mathrm{d}\tau. \tag{5.67}$$

最后回到 z 平面上来，问题完全解决.

5.2.4 第二基本问题

现在假定已知裂纹两侧上的位移 $u^{\pm}(t)+\mathrm{i}v^{\pm}(t)\in H$，其导数 $\in H^*$，且设位移为准周期的，即满足(5.31)式，其中 q 为已知实常数. 又设 σ_+,τ_+ 均已知；此外，还假定 $X+\mathrm{i}Y$ 已知. 于是，由(5.44) ~ (5.48)式，β,σ_-,τ_-，$h_{\pm}$ 也均已知(或者，先已知 $\sigma_+,\tau_+,h_+,X^++\mathrm{i}Y^+$ 也一样). 当然，还要假设

$$\left.\begin{array}{l} u^+(a_j)=u^-(a_j),\ v^+(a_j)=v^-(a_j), \\ u^+(b_j)=u^-(b_j),\ v^+(b_j)=v^-(b_j), \end{array}\right\}\quad j=1,2,\cdots,p.$$

在上述条件下，求弹性平衡.

这时，此问题可转化为在 h_{2p} 类中求解边值问题

$$-\kappa\varphi^{\pm}(t)+t\,\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}=f^{\pm}(t),\quad t\in L,\tag{5.68}$$

其中

$$f^{\pm}(t)=-2\mu(u^{\pm}(t)+\mathrm{i}v^{\pm}(t)).\tag{5.69}$$

要注意到，(5.68)式两端均为 t 的准周期函数，当 t 变为 $t+a\pi$ 时，它们同时有改变量 $-a\pi q$.

不妨仍设 $\varphi_0(-\infty\mathrm{i})=0$. 但是由于现在不能有刚性平移的任意性(旋转更不容许)，因而，对于 $\psi_0(-\infty\mathrm{i})$，除有界性条件外，不能再作别的限制.

现将一般表达式(5.36)与(5.37)代入(5.68)，可以得到边值条件：

$$-\kappa\varphi_0^{\pm}(t)+(t-\bar{t})\,\overline{\varphi_0'^{\pm}(t)}+\overline{\psi_0^{\pm}(t)}=f_0^{\pm}(t),\quad t\in L,\tag{5.70}$$

其中

$$\begin{aligned} f_0^{\pm}(t)=&f^{\pm}(t)+q\bar{t}-\frac{\kappa}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\ln|\zeta_k^{\pm}(t)| \\ &+\frac{t-\bar{t}}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k-\mathrm{i}Y_k)\,\overline{Z_k'^{\pm}(t)}+(\kappa\beta-\bar{\beta})(t-\bar{t}).\end{aligned}\tag{5.71}$$

注意，现在

$$f_1^{\pm}(t)\equiv f^{\pm}(t)+q\bar{t},\tag{5.72}$$

已是以 $a\pi$ 为周期的函数，从而 $f_0^{\pm}(t)$ 也是的.

作保形映射(5.57)时，边值条件(5.70)变为

$$-\kappa\varphi_0^{*\pm}(\tau)-2\bar{\tau}\ln|\tau|\,\overline{\varphi_0^{*\prime\pm}(\tau)}+\overline{\psi_0^{*\pm}(\tau)}=f_0^{*\pm}(\tau),\quad \tau\in\Gamma,\tag{5.73}$$

这里，由(5.71)式，

$$\begin{aligned} f_0^{*\pm}(\tau)=&f_1^{*\pm}(\tau)-\frac{\kappa}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\log|\zeta_k^{*\pm}(\tau)| \\ &-\frac{\bar{\tau}\ln|\tau|}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k-\mathrm{i}Y_k)\,\overline{Z_k^{*\prime\pm}(\tau)}+a\mathrm{i}(\kappa\beta-\bar{\beta})\ln|\tau|,\end{aligned}\tag{5.74}$$

其中已令(参看(4.72)式)

$$f_1^{*\pm}(\tau)=f^*\left(\frac{a}{2\mathrm{i}}\log\tau\right)-\frac{aq}{\pi\mathrm{i}}\overline{\log\tau},$$

这里 $\log\tau$ 任意取定一支，例如不妨设 $\mathrm{Im}\log\tau=\arg\tau$，$|\arg\tau|<\pi$.

现在我们的问题成为：要在附加条件 $\varphi_0^*(\infty)=0$ 之下，在 h_{2p} 类中求解边值问题(5.73). 这里，仍假设 $\varphi_0^{*\pm}(\tau)\in H$，$\varphi_0^{*'\pm}(\tau),\psi_0^{*\pm}(\tau)\in H^*$. 此时，$X_1,Y_1,\cdots,X_{p-1},Y_{p-1}$ 都是待定常数(由于 $X+\mathrm{i}Y$ 已知，因而 X_p,Y_p 可用这些待定常数表出).

为清楚起见，将(5.73)式改写为

$$\left.\begin{aligned}&-\kappa(\overline{\varphi_0^{*+}(\tau)}-\overline{\varphi_0^{*-}(\tau)})-2\tau\ln|\tau|(\varphi_0^{*'+}(\tau)-\varphi_0^{*'-}(\tau))\\&+(\psi_0^{*+}(\tau)-\psi_0^{*-}(\tau))=F_0^*(\tau),\\&-\kappa(\overline{\varphi_0^{*+}(\tau)}+\overline{\varphi_0^{*-}(\tau)})-2\tau\ln|\tau|(\varphi_0^{*'+}(\tau)+\varphi_0^{*'-}(\tau))\\&+(\psi_0^{*+}(\tau)+\psi_0^{*-}(\tau))=G_0^*(\tau),\end{aligned}\right\}\quad\tau\in\Gamma,\tag{5.75}$$

计及(5.74)，当 $\tau\in\Gamma_j$ 时，

$$\begin{aligned}F_0^*(\tau)&=\overline{F^*(\tau)}-\frac{2\tau\ln|\tau|}{\pi(\kappa+1)}\frac{X_j+\mathrm{i}Y}{\sqrt{(\tau-a_j)(\tau-\beta_j)}},\\G_0^*(\tau)&=\overline{f_1^{*+}(\tau)}+\overline{f_1^{*-}(\tau)}-\frac{2\kappa}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k\neq j}(X_k-\mathrm{i}Y_k)\log|\zeta_k^{*+}(\tau)|\\&\quad-\frac{2\tau\ln|\tau|}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k\neq j}\frac{X_k+\mathrm{i}Y_k}{\sqrt{(\tau-a_k)(\tau-\beta_k)}}\\&\quad+2a\mathrm{i}(\kappa\beta-\bar{\beta})\ln|\tau|,\end{aligned}\tag{5.76}$$

这里已令

$$\begin{aligned}F^*(\tau)&=\overline{f_1^{*+}(\tau)}-\overline{f_1^{*-}(\tau)}-\frac{2\kappa}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\ln|\zeta_k^{*+}(\tau)|\\&=\overline{f^+\left(\frac{a}{2\mathrm{i}}\log\tau\right)}-\overline{f^-\left(\frac{a}{2\mathrm{i}}\log\tau\right)}\\&\quad-\frac{2\kappa}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{p}(X_k+\mathrm{i}Y_k)\ln|\zeta_k^{*+}(\tau)|,\quad\tau\in\Gamma.\end{aligned}\tag{5.77}$$

如同上段，令 $\varphi_0^*(w)$ 由(5.64)式表示. 类似地，由(5.75)式可以得到奇异积分方程

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{\rho(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\rho(\tau)\mathrm{d}\log\frac{\bar{\tau}-\bar{\tau}_0}{\tau-\tau_0}\\&-\frac{1}{\kappa\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\overline{\rho(\tau)}\,\mathrm{d}\frac{\tau\ln|\tau|-\tau_0\ln|\tau_0|}{\tau-\tau_0}\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{2\kappa\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{F_0^*(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-\tau_0}-\frac{1}{2\kappa}G_0^*(\tau)-\frac{1}{\kappa}(D_1+\mathrm{i}D_2),\quad \tau_0\in\Gamma,$$

其中 $D_1+\mathrm{i}D_2$ 为待定复常数；这方程也可改写为下列形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_2\rho\equiv&\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\rho(\tau)\mathrm{d}\log\frac{\overline{\tau}-\overline{\tau_0}}{\tau-\tau_0}\\&-\frac{\tau_0}{\kappa\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\overline{\rho(\tau)}\,\mathrm{d}\,\frac{\ln|\tau|-\ln|\tau_0|}{\tau-\tau_0}\\&=-\frac{1}{2\kappa\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{F_0^*(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-\tau_0}+\frac{1}{2\kappa}G_0^*(\tau_0)\\&+\frac{1}{\kappa}(D_1^*+\mathrm{i}D_2^*),\quad \tau_0\in\Gamma,\end{aligned}\tag{5.78}$$

这里已令

$$D_1^*+\mathrm{i}D_2^*=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\overline{\rho(\tau)}\,\mathrm{d}\ln|\tau|-(D_1+\mathrm{i}D_2).\tag{5.79}$$

显然，方程(5.78)为正则型奇异积分方程，其中含 $2p$ 个待定实常数 X_1，$Y_1,\cdots,X_{p-1},Y_{p-1}$ 和 D_1^*,D_2^*. 和上段论证相类似. 可以证明此方程在 h_{2p} 类中唯一可解.

当 $\rho(\tau)$ 求出后，$\varphi_0^*(w)$ 仍由(5.64)式给出，而这时，$\psi_0^*(w)$ 要用下式算出：

$$\begin{aligned}\psi_0^*(w)=&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}(\kappa\rho(\tau)+2\tau\ln|\tau|\overline{\rho(\tau)'})\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-w}\\&+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{F_0^*(\tau)}{\tau-w}\mathrm{d}\tau+D_1+\mathrm{i}D_2,\end{aligned}$$

其中 $D_1+\mathrm{i}D_2$ 通过已求得的常数 $D_1^*+\mathrm{i}D_2^*$ 从(5.79)式给出. 最后，回到 z 平面，问题便完全解决.

如果同一周期中，各裂纹上的位移只精确到一常数项(各裂纹上的常数可不同)，而补充已知各裂纹上的周期外应力合主矢量，则方程(5.78)的形式将与上段所得的更为相似.

例 5.1 考虑水平共线周期直裂纹情况.

设 $L_0=\sum_{k=1}^{p}L_k$ 为一个周期带 $|\mathrm{Re}\,z|<\frac{a\pi}{2}$ 内在实轴上的一些互不相交的线段.

现在 $|\tau|=1$，因而

$$\frac{\overline{\tau}-\overline{\tau_0}}{\tau-\tau_0}=-\frac{1}{\tau\tau_0},$$

这时 Γ 为 $|\tau|=1$ 上的一些弧段，而方程(5.66)成为

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{F_0^*(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}G_0^*(\tau_0)+\frac{a}{2}(\sigma_{+}+\mathrm{i}\tau_{+})\arg\tau_0$$
$$+\frac{a}{2}(\tau_{+}-\mathrm{i}\sigma_{+})\log\tau_0-C_2^*(\tau_0),$$
$$\tau_0\in\Gamma,\ |\arg\tau_0|<\pi, \qquad (5.80)$$

其中 $C_2^*(\tau_0)=C_j''(\tau_0\in\Gamma_j)$ 为新的待定常数.

这一问题是修改了的 Cauchy 型积分反演问题，因此，可按 Н. И. Мусхелишвили 所提供的方法求解．或者，也可转化为简单的 Riemann 问题．最后可将解答写为封闭的积分形式．其结果将与(5.18)′相符合(当 $p=1$ 时)．今讨论从略.

例 5.2　周期的共线铅直直裂纹情况.

现设 $L_0=\sum\limits_{k=1}^{p}L_k$ 是虚轴上的一组互不相交的线段．这时，Γ 为正实轴上的一些直线段($\tau\in\Gamma$ 为正实数).

此时，方程(5.66)成为

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau+\frac{\tau_0}{\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\overline{\rho(\tau)}\,\mathrm{d}\,\frac{\ln\tau-\ln\tau_0}{\tau-\tau_0}$$
$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{F_0^*(\tau)}{\tau-\tau_0}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2}G_0^*(\tau_0)$$
$$+\frac{a}{2}(\tau_{+}+\mathrm{i}h_{+})\ln\tau_0-C_1^*(\tau_0),\quad \tau_0\in\Gamma, \qquad (5.81)$$

方程中 τ,τ_0 均为实数.

求解方程时，可先把它分解为 $\rho(t)$ 的实部与虚部分别所应满足的方程，然后对此方程组可用近似方法求解．这种近似求解法例如可参阅 Baker [1].

5.3　被周期直裂纹削弱的无限各向异性弹性平面的基本问题

5.3.1　一般说明

设各向异性无限弹性平面内，存在着分布在 x 轴上、互不相交、长为 $2l$ $\left(l<\frac{a\pi}{2}\right)$、且以 $a\pi$ 为周期排列着的无限条直线段纹 $L_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，

如图 5.1 所示，其总体记为 $L_j=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}L_k$；并设 L_0 为线段 $-l\leqslant x\leqslant l$，L 在 x 轴上的相补部分记为 L'，而 L_0 在一个周期 $-\frac{a\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a\pi}{2}$ 中的相补部分记为 L_0'；故 L' 实为 L_0'的周期延拓.

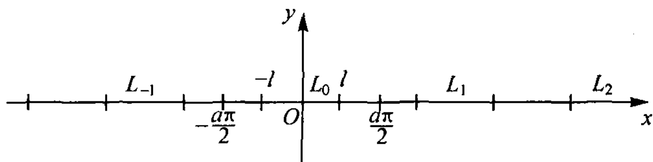


图 5.1

在 $z=\pm\infty\mathrm{i}$ 处的应力 $\tau_{xy}(\pm\infty\mathrm{i})+\mathrm{i}\sigma_y(\pm\infty\mathrm{i})$ 应理解为 $\tau_{xy}(z)+\mathrm{i}\sigma_y(z)$ 当 $z=x+y\mathrm{i}\to\pm\infty\mathrm{i}$ (即 x 固定，$y\to\pm\infty$) 时的极限值. 我们恒设应力也是周期的. 在一个周期带 S_0：$|\mathrm{Re}\,z|\leqslant\frac{a\pi}{2}$ 上的平衡条件为

$$\sigma_y(+\infty\mathrm{i})-\sigma_y(-\infty\mathrm{i})=\frac{1}{a\pi}\int_{-l}^{l}(\sigma_y^+(t)-\sigma_y^-(t))\mathrm{d}t \tag{5.82}$$

和

$$\tau_{xy}(+\infty\mathrm{i})-\tau_{xy}(-\infty\mathrm{i})=\frac{1}{a\pi}\int_{-l}^{l}(\tau_{xy}^+(t)-\tau_{xy}^-(t))\mathrm{d}t. \tag{5.83}$$

我们还恒设位移也是周期的. 这一条件相当于

$$[u(z)+\mathrm{i}v(z)]_{\Lambda_\pm}=0, \tag{5.84}$$

其中 $\Lambda_\pm$ 为图 2.6 中自左至右的有向线段；且易见，当 $\Lambda_\pm$ 分别在上、下半平面上下或左右平移时，此式左端的量不变.

我们还指出：$z=x+\mathrm{i}y\in S$ 等价于 $z_1=x+\mu_1y$ 和 $z_2=x+\mu_2y\in S$，因而既然复应力函数 $\Phi(z_1)$ 和 $\Psi(z_2)$ 分别为 z_1 和 z_2 在 S 中的全纯函数，故 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 也是 z 在 S 中的全纯函数(一切记号均同第三章).

不妨设 $\mathrm{Im}\,\mu_j>0$ $(j=1,2)$. 这样，z 在上(下)半平面时，z_1 和 z_2 也在上(下)半平面；反之亦然.

我们只限于讨论实用中常见的第一基本问题. 由周期性假设，讨论只须限于一个周期带 S_0 中.

5.3.2 周期法向载荷情形

现设在 L 两侧已给法向周期载荷，即在 L 上已给$\sigma_y^\pm(t)\in H$，而 $\tau_{xy}^\pm(t)=$

0；并为简单起见，设在 L 两侧上总载荷相等(这在实际问题中常见，这时 $\varphi(z_1)$ 和 $\psi(z_2)$ 是单值的)，即

$$\int_{-l}^{l}\sigma_y^+(t)\mathrm{d}t=\int_{-l}^{l}\sigma_y^-(t)\mathrm{d}t. \tag{5.85}$$

于是，平衡条件(5.82) 成为 $\sigma_y(+\infty\mathrm{i})=\sigma_y(-\infty\mathrm{i})$.

这时，当 $z=z_1=z_2=t$ 在 x 轴上时，由(3.4) 式知，

$$\mathrm{Re}\{\mu_1\Phi^\pm(t)+\mu_2\Psi^\pm(t)\}=0,\quad t\in L.$$

但 $\mu_1\Phi(z)+\mu_2\Psi(z)$ 作为 $z\in S$ 时的全纯函数，此式表明，它在 S 的边界即 L 的正、负两侧上的边值实部为 0，故知

$$\mu_1\Phi(z)+\mu_2\Psi(z)=\frac{\mathrm{i}}{2}C,\quad z\in S, \tag{5.86}$$

其中 C 为某实常数；亦即

$$\Psi(z)=-\frac{\mu_1}{\mu_2}\Phi(z)+\frac{\mathrm{i}}{2\mu_2}C,\quad z\in S. \tag{5.86}$$

将它代入(3.3) 式，得知

$$\sigma_y(z)=2\mathrm{Re}\left\{\Phi(z_1)-\frac{\mu_1}{\mu_2}\Phi(z_2)\right\}-C',\quad z\in S, \tag{5.87}$$

这里已令

$$C'=-C\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\mu_2}\right\}. \tag{5.88}$$

这样，当 $z=t\in L$ 为实数时，便有

$$\sigma_y^\pm(t)=2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^\pm(t)\right\}-C',\quad t\in L, \tag{5.89}$$

或即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y^+(t)&=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^+(t)+\frac{\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\,\overline{\Phi}^-(t)-C',\\ \sigma_y^-(t)&=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^-(t)+\frac{\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\,\overline{\Phi}^+(t)-C',\end{aligned}\right\}\quad t\in L, \tag{5.90}$$

其中已记 $\overline{\Phi^+(t)}=\overline{\Phi}^-(t)$，$\overline{\Phi^-(t)}=\overline{\Phi}^+(t)$，而 $\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar z)}$ 为 S 中的全纯函数，将(5.90) 中两式相加减，得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^+(t)+\frac{\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\,\overline{\Phi}^+(t)\right)\\ &\quad+\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^-(t)+\frac{\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_2}}\,\overline{\Phi}^-(t)\right)\\ &=2f_1(t)+2C',\quad t\in L;\end{aligned} \tag{5.91}$$

$$\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^+(t)-\frac{\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}^+(t)\right)$$
$$-\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi^-(t)-\frac{\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}}{\overline{\mu_1}}\overline{\Phi}^-(t)\right)=2g_1(t), \qquad (5.92)$$

其中已令

$$f_1(t)=\frac{1}{2}(\sigma_y^+(t)+\sigma_y^-(t)), \qquad (5.93)$$

$$g_1(t)=\frac{1}{2}(\sigma_y^+(t)-\sigma_y^-(t)), \qquad (5.94)$$

且 $\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})}$ 是 S 中的全纯函数.

由假设，$\Phi(\pm\infty\mathrm{i})$ 有限，从而 $\overline{\Phi}(\pm\infty\mathrm{i})$ 也有限；且 $\Phi(z)$ 与 $\overline{\Phi}(z)$ 均在 h_0 类中.

由推广的 Plemelj 公式，周期边值问题(5.92) 在 h_0 类中的一般解为

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi(z)-\frac{\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}(z)=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}g_1(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}\mathrm{d}\tau+2\mathrm{i}\beta,$$
$$z\in S, \qquad (5.95)$$

其中β为一常数. 在此式中把z改为$\bar{z}$，并两端取共轭，左端要变号，故知β为实数.

引进典则函数 $X(z)=\sqrt{R(z)}$，其中

$$R(z)=\tan^2\frac{l}{a}-\tan^2\frac{z}{a}.$$

$X(z)$ 在 S 中全纯，$\sqrt{R(z)}$ 在用 L 剖开的z平面中可任意取定一连续分支，例如，取定这样的分支，使

$$\lim_{z\to\pm\infty\mathrm{i}}\frac{1}{\sqrt{R(z)}}=\pm\cos\frac{l}{a},$$

这时

$$\lim_{z\to\pm\frac{a\pi}{2}}\frac{\tan\frac{z}{a}}{\sqrt{R(z)}}=1. \qquad (*)$$

周期 Riemann 边值问题(5.91)，在 h_0 类中的一般解为

$$\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\Phi(z)+\frac{\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}}{\overline{\mu_2}}\overline{\Phi}(z)$$
$$=\frac{1}{a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}(f_1(\tau)+C')\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z}{a}\mathrm{d}\tau$$
$$+\frac{2\left(C_0\tan\frac{z}{a}+C_1\right)}{\sqrt{R(z)}}, \quad z\in S, \qquad (5.96)$$

其中 C_0,C_1 为任意常数. 由于 z 从 L_0 的上侧趋于其上任一点 t 时，很明显(5.96) 式左端以及右端的第一项的极限值均为实数，所以 C_0 与 C_1 必须为实常数. 注意，在上式中，积分号下出现的$\sqrt{R(\tau)}$ 应理解为 z 从上半平面趋于 L_0 上点 τ 时的极限值，故实际上$\sqrt{R(\tau)}$ 在$(-l,+l)$ 上取正实值.

将(5.95) 式与(5.96) 式相加，则得

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\Bigg[&\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l} g_1(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}(f_1(\tau)+C')\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{C_0\tan\frac{z}{a}+C_1}{\sqrt{R(z)}}+\mathrm{i}\beta\Bigg].\end{aligned} \tag{5.97}$$

再由(5.86)′ 式，便得

$$\begin{aligned}\Psi(z) = \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\Bigg[&\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l} g_1(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}(f_1(\tau)+C')\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{C_0\tan\frac{z}{a}+C_1}{\sqrt{R(z)}}+\mathrm{i}\beta\Bigg]+\frac{\mathrm{i}C}{2\mu}.\end{aligned} \tag{5.98}$$

下面的问题是要确定实常数 C,C_0,C_1 和 β. 我们要利用条件(5.82) 和(5.84). 在应用这些条件之前，注意下列等式：

$$\frac{1}{\sqrt{R(\pm\infty\mathrm{i})}}=\pm\cos\frac{l}{a},\quad \int_{\Lambda_\pm}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{R(z)}}=\pm a\pi\cos\frac{l}{a},$$

$$\int_{\Lambda_\pm}\frac{\tan\frac{z}{a}}{\sqrt{R(z)}}\mathrm{d}z=\int_{\Lambda_\pm}\frac{\cot\frac{\tau-z}{a}}{\sqrt{R(z)}}\mathrm{d}z=a\pi\mathrm{i}\cos\frac{l}{a}$$

(以上诸式中，把 z 换作 z_1 或 z_2 时也成立).

先考虑弹性平衡条件(5.82). 由(5.87) 式，

$$\sigma_y(+\infty\mathrm{i})-\sigma_y(-\infty\mathrm{i})=2\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}(\Phi(+\infty\mathrm{i})-\Phi(-\infty\mathrm{i}))\right\},$$

此式左端为 0. 又因现在

$$\int_{-l}^{l} g_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau=0. \tag{5.99}$$

故由(5.97)式，从上式便知

$$C_1 = 0. \tag{5.100}$$

条件(5.83)现在自动成立.

再考虑条件(5.84). 由(3.5)式，从$[u(z)]_{\Lambda_\pm} = 0$可得出同一方程(注意(5.99)和(5.100)式已成立)

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1\mu_2 - p_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\left[F_1\cos\frac{l}{a} + C'Q\cos\frac{l}{a} + a\pi\mathrm{i}\left(C_0\cos\frac{l}{a} + \beta\right)\right]\right\} + \frac{a\pi C}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}p_2}{\mu_2}\right\} = 0; \tag{5.101}$$

类似地，由(3.6)式，$[v(z)]_{\Lambda_\pm} = 0$也可化为同一方程

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\left[F_1\cos\frac{l}{a} + C'Q\cos\frac{l}{a} + a\pi\mathrm{i}\left(C_0\cos\frac{l}{a} + \beta\right)\right]\right\} + \frac{a\pi C}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{i}q_2}{\mu_2}\right\} = 0, \tag{5.102}$$

其中已令

$$F_1 = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} f_1(\tau)\sqrt{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \tag{5.103}$$

为一已知实常数，而

$$Q = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sqrt{(R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \tag{5.104}$$

为一与边界条件无关的已知实常数.

为要确定 C (C' 由(5.88)式与 C 联系)，C_0 和 β，现在只有两个方程(5.101)和(5.102). 所以，为了解的唯一性，还应补充一条件，例如，可要求$\sigma_y(+\infty\mathrm{i})(=\sigma_y(-\infty\mathrm{i})) = \sigma_0$为一事先已指定的实常数. 由(3.2)式，这个补充条件为

$$\sigma_0 = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2}\Phi(+\infty\mathrm{i})\right\} - C',$$

再由(5.97)式(并注意到(5.99)和(5.100)式)，便得

$$\sigma_0 = \frac{\cos\dfrac{l}{a}}{a\pi}\int_{-l}^{l}(f_1(\tau) + C')\sqrt{R(\tau)}\mathrm{d}\tau - C',$$

亦即

$$\sigma_0 = \frac{2\cos\dfrac{l}{a}}{a\pi}(F_1 + C'Q) - C'. \tag{5.105}$$

易证

$$0<\frac{2Q\cos\frac{l}{a}}{a\pi}<1,$$

故由此立即可求得 C' 从而 C.

这样，将(5.101)和(5.102)联立，便可求出 C_0 和 β，问题完全解决．最后，应力函数 $\Phi(z_1)$（在(5.97)式中把 z 换成 z_1）和 $\Psi(z_2)$（在(5.98)式中把 z 换成 z_2）就完全求出了(注意已知 $C_1=0$).

如果在 L 上已知的是法向对称载荷，即 $\sigma_y^+(t)=\sigma_y^-(t)$，则 $g_1(t)=0$，解将简单些；如果还是均匀法向对称载荷，即 $\sigma_y^+(t)=\sigma_y^-(t)=\text{const}$，则解将更简单．均从略.

5.3.3　周期切向载荷情形

现考虑在 L 两侧给定了周期切向载荷的情形，即在 L 上已给出 $\tau_{xy}^{\pm}(t)\in H$ 而 $\sigma_y^{\pm}(t)=0$；并设

$$\int_{-l}^{l}\tau_{xy}^{+}(t)\mathrm{d}t=\int_{-l}^{l}\tau_{xy}^{-}(t)\mathrm{d}t. \tag{5.106}$$

这时平衡条件(5.83)成为

$$\tau_{xy}(+\infty\mathrm{i})=\tau_{xy}(-\infty\mathrm{i}).$$

当 $z=t$ 在 x 轴上时，由(3.3)式，

$$\mathrm{Re}\{\Phi^{\pm}(t)+\Psi^{\pm}(t)\}=0,\quad t\in L;$$

与上段中同样的理由，知

$$\Psi(z)=-\Phi(z)+\frac{\mathrm{i}}{2}D,\quad z\in S, \tag{5.107}$$

其中 D 为某实常数，将它代入(3.4)式，得知

$$\tau_{xy}(z)=-2\mathrm{Re}\{\mu_1\Phi(z_1)+\mu_2\Psi(z_2)\}-D', \tag{5.108}$$

其中

$$D'=D\mathrm{Re}\{\mathrm{i}\mu_2\}. \tag{5.109}$$

于是，当 $z=t$ 在 x 轴上时，便有

$$\tau_{xy}^{\pm}(t)=2\mathrm{Re}\{(\mu_2-\mu_1)\Phi^{\pm}(t)\}-D'; \tag{5.110}$$

而当 $t\in L$ 时，则有

$$(\mu_2-\mu_1)\Phi^{+}(t)+(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\Phi}^{-}(t)=\tau_{xy}^{+}(t)+D',\quad t\in L, \tag{5.111}$$

$$(\mu_2-\mu_1)\Phi^{-}(t)+(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\Phi}^{+}(t)=\tau_{xy}^{-}(t)+D',\quad t\in L, \tag{5.112}$$

其中仍已令 $\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})}$．将此二式相加减，得

$$
\begin{aligned}
&[(\mu_2-\mu_1)\Phi^+(t)+(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\Phi}^+(t)] \\
&+[(\mu_2-\mu_1)\Phi^-(t)+(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\Phi}^-(t)] \\
=\;& 2f_2(t)+2D',\quad t\in L,
\end{aligned}
\tag{5.113}
$$

$$
\begin{aligned}
&[(\mu_2-\mu_1)\Phi^+(t)-(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\Phi}^+(t)] \\
&-[(\mu_2-\mu_1)\Phi^-(t)-(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\Phi}^-(t)] \\
=\;& 2g_2(t),\quad t\in L,
\end{aligned}
\tag{5.114}
$$

其中已令

$$
f_2(t)=\frac{1}{2}(\tau_{xy}^+(t)+\tau_{xy}^-(t)),\quad t\in L,
\tag{5.115}
$$

$$
g_2(t)=\frac{1}{2}(\tau_{xy}^+(t)-\tau_{xy}^-(t)),\quad t\in L.
\tag{5.116}
$$

我们要求(5.113) 和(5.114) 在 h_0 类中的解.

由推广的 Plemelj 公式，周期边值问题(5.114) 在 h_0 类中的一般解为

$$
\begin{aligned}
&(\mu_2-\mu_1)\Phi(z)-(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\Phi}(z) \\
=\;& \frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}g_2(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau+2\mathrm{i}\gamma,\quad z\in S,
\end{aligned}
\tag{5.117}
$$

其中，与上段相同的理由，γ 为一任意实常数，而周期边值问题(5.113) 在 h_0 类中的一般解为

$$
\begin{aligned}
&(\mu_2-\mu_1)\Phi(z)+(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1})\overline{\Phi}(z) \\
=\;& \frac{1}{a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}(f_2(\tau)+D')\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau \\
&+\frac{2\left(D_0\tan\frac{z}{a}+D_1\right)}{\sqrt{R(z)}},
\end{aligned}
\tag{5.118}
$$

其中 D_0, D_1 为任意实常数.

将此二式相加，便得

$$
\begin{aligned}
\Phi(z)=\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\Bigg\{&\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}g_2(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau \\
&+\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}(f_2(\tau)+D')\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau \\
&+\frac{D_0\tan\frac{z}{a}+D_1}{\sqrt{R(z)}}+\mathrm{i}\gamma\Bigg\};
\end{aligned}
\tag{5.119}
$$

再由(5.107) 式，

$$\Psi(z)=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}}\int_{-l}^{l}g_2(\tau)\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau\right.$$

$$+\frac{1}{2a\pi\mathrm{i}\sqrt{R(z)}}\int_{-l}^{l}(f_2(\tau)+D')\sqrt{R(\tau)}\cot\frac{\tau-z}{a}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\left.+\frac{D_0\tan\frac{z}{a}+D_1}{\sqrt{R(z)}}+\mathrm{i}\gamma\right\}+\frac{\mathrm{i}}{2}D. \tag{5.120}$$

如同上段，由弹性平衡条件(5.83)，现因

$$\int_{-l}^{l}g_2(\tau)\mathrm{d}\tau=0, \tag{5.121}$$

可证得

$$D_1=0; \tag{5.122}$$

而条件(5.82)现在自动成立．位移周期性条件(5.84)现在成为下列两个实方程：

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1-p_2}{\mu_2-\mu_1}\left[F_2\cos\frac{l}{a}+D'Q\cos\frac{l}{a}+a\pi\mathrm{i}\left(D_0\cos\frac{l}{a}+\gamma\right)\right]\right\}$$

$$+\frac{a\pi D}{2}\mathrm{Re}\{\mathrm{i}p_2\}=0, \tag{5.123}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{q_1-q_2}{\mu_2-\mu_1}\left[F_2\cos\frac{l}{a}+D'Q\cos\frac{l}{a}+a\pi\mathrm{i}\left(D_0\cos\frac{l}{a}+\gamma\right)\right]\right\}$$

$$+\frac{a\pi D}{2}\mathrm{Re}\{\mathrm{i}q_2\}=0, \tag{5.124}$$

其中已令

$$F_2=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}f_2(\tau)\sqrt{R(\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \tag{5.125}$$

此外，还应附加要求例如 $\tau_{xy}(+\infty\mathrm{i})$ $(\tau_{xy}(-\infty\mathrm{i}))=\tau_0$ 为一事先已指定的实常数．由(3.2)和(5.107)式，得

$$\tau_0=\frac{2\cos\frac{l}{a}}{a\pi}(F_2+D'Q)-D', \tag{5.126}$$

由此便可求出 D' 因而 D.

将(5.123)和(5.124)联立，便可求出 D_0 和 γ，问题完全解决．最后应力函数 $\Phi(z_1)$（在(5.119)式中把 z 改为 z_1）和 $\Psi(z_2)$（在(5.120)式中把 z 改为 z_2）就完全确定了(注意已知 $D_1=0$).

如果在 L 上已知的是切向反对称载荷，即 $\tau_{xy}^{+}(t)=\tau_{xy}^{-}(t)$，则 $g_2(t)=0$，

解将简单些；如果还是均匀切向反对称载荷，即 $\tau_{xy}^{+}(t)=\tau_{xy}^{-}(t)=\mathrm{const}$，则解将更简单．均从略．

注 1 在本节中，位移周期性条件如改为准周期性，且准周期加数为事先已给定的实常数 q，则所论方法完全适用．

注 2 如果在 L 的两侧有一般的载荷 $\sigma_{xy}^{\pm}(t)+\mathrm{i}\tau_{xy}^{\pm}(t)$，且总载荷主矢量大小相等、方向相反，则可将上两段的结果叠加，便可求得解答，不再重复．

注 3 如果条件(5.85)或(5.106)不满足，则 $\varphi(z_1)$ 和 $\psi(z_2)$ 是多值的，这就需要先将它们的多值部分分离出来，再进行如上的讨论．这里从略．

5.3.4 应力强度因子

对于了解在裂纹 L_0 的尖端周围的应力分布，特别是其奇异性的性态，尤为重要．置

$$x=l+r\cos\theta,\quad y=l+r\sin\theta,\quad r>0,$$

其中 r 与半裂纹长度 l 相比较是很小的，极坐标 r 与 θ 分别表示自裂纹尖端的径向距离与径向线和裂纹前缘的夹角．

注意到，当 $z_j\approx l$ 时

$$\left(\tan^2\frac{z_j}{a}-\tan^2\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\approx\sec^2\frac{l}{a}\,[2r(\cos\theta+\mu_j\sin\theta)]^{\frac{1}{2}},\quad j=1,2.$$

这样，关于裂纹两侧上线向或切向载荷周期边值问题的应力函数可以写为

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z_1)&=\frac{F_j}{[r(\cos\theta+\mu_j\sin\theta)]^{\frac{1}{2}}}+O(1),\\ \Psi(z_2)&=\frac{G_j}{[r(\cos\theta+\mu_j\sin\theta)]^{\frac{1}{2}}}+O(1),\end{aligned}\right\}\quad j=1,2\quad(r\to 0\text{ 时}),\tag{5.127}$$

其中

$$F_1=\frac{k_1\mu_2\cos\dfrac{l}{a}}{2\sqrt{2}(\mu_2-\mu_1)},\quad F_2=\frac{k_2\cos\dfrac{l}{a}}{2\sqrt{2}(\mu_2-\mu_1)},\text{①}$$

$$G_1=\frac{k_1\mu_1\cos\dfrac{l}{a}}{2\sqrt{2}(\mu_1-\mu_2)},\quad G_2=\frac{k_2\cos\dfrac{l}{a}}{2\sqrt{2}(\mu_1-\mu_2)}=-F_2.$$

---

① 这里的 F_1,F_2 和前两段中表示的无关．

应力强度因子 $k_j(j=1,2)$ 可直接由应力函数 $\Phi(z_1)$ 或 $\Psi(z_2)$ 计算. 从(5.97)或(5.119)式(其中 z 改为 z_1), 分别有

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2}\right)\lim_{z_1\to t_0}\left(\tan\frac{z_1}{a}-\tan\frac{t_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\Phi(z_1), \\ k_2 &= 2\sqrt{2}(\mu_2-\mu_1)\lim_{z_1\to t_0}\left(\tan\frac{z_1}{a}-\tan\frac{t_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\Phi(z_1), \end{aligned}\right\} \tag{5.128}$$

其中 t_0 为 L_0 上的一点.

另一方面, 应力强度因子 k_1, k_2 也可由函数 $\Psi(z_2)$ 表示为

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\right)\lim_{z_2\to t_0}\left(\tan\frac{z_2}{a}-\tan\frac{t_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi(z_2), \\ k_2 &= 2\sqrt{2}(\mu_1-\mu_2)\lim_{z_2\to t_0}\left(\tan\frac{z_2}{a}-\tan\frac{t_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi(z_2). \end{aligned}\right\} \tag{5.129}$$

当 $a\to\infty$ 时, 可以得到 x 轴上仅有单个裂纹时的强度因子, 这与 G. C. Sih 和 H. Liebowitz [1] 中的结果是一致的.

第六章

平面弹性的双周期问题

在工程实际中，有时会出现平面弹性中的双周期问题. 与非周期或单周期情况相比较，此类问题远远没有充分研究，除在某些极为特殊的情况外. 例如，在 Koiter [2] 中，对在基本双周期平行四边形中只有一个洞的情况，讨论了复应力函数的表达式，提出并求解了第一基本问题. 但是，当在这平行四边形中，有多个洞时，应力函数为多值的，大为复杂. 此外，当在其中不是出现洞而是出现裂纹时，情况十分相异.

在本章中，我们将对各向同性介质的双周期平面弹性问题，在一般情况下作一简要论述，包括双周期应力函数的一般表达式以及基本问题的一般提法. 这些结果首先发表在路见可[4] 以及稍后独立发表在郑可[1] 中.

6.1 预备知识

6.1.1 一般概念

设 ω_1,ω_2 为两复常数，$\mathrm{Im}\,\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\neq 0$，在某区域 D（不一定连通）中的函数 $F(z)$ 称为以 $2\omega_1$ 和 $2\omega_2$ 为周期的双周期函数如果

$$F(z+2\omega_j)=F(z),\quad z\in D,\ j=1,2;\tag{6.1}$$

当然，D 本身必须是双周期的，亦即 $z\in D$ 隐含 $z+2\omega_j\in D$. 今后，我们恒设 $\mathrm{Im}\,\dfrac{\omega_2}{\omega_1}>0$，否则的话，只要把 ω_2 换作 $-\omega_2$；且已确定 ω_1,ω_2 永远固定不变.

对任何 z_0，以 $z_0,z_0+2\omega_1,z_0+2\omega_1+2\omega_2,z_0+2\omega_2$ 为顶点的平行四边形称为**双周期平行四边形**(它们以反时针向排列). 特别，如取 $z_0=0$ 时，它就

称为基本双周期平行四边形，或简称基本胞腔，记作 P_0. P_0 的边界闭路 Γ_0 以反时针向取为正向，其四边记为 Γ_j，$j = 1,2,3,4$，如图 6.1 所示.

图 6.1

点 $\Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ $(m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 周期合同于 0 (mod $2\omega_j$)，一般，$\Omega_{mn} + z \equiv z$ (mod $2\omega_j$).

一函数 $F(z)$ 如果满足

$$F(z + 2\omega_k) = F(z) + \alpha_k, \quad z \in D,\ k = 1,2, \tag{6.2}$$

则称为在 D 中是双准周期的，其中 α_1, α_2 是两常数，称为 $F(z)$ 的加数.

设在 P_0 中有 p 条互为外离的光滑闭路 $L_1, L_2, \cdots, L_p$，各以时针向取为正向；L_j 所围内域记为 S_j^-(图 6.2). 记

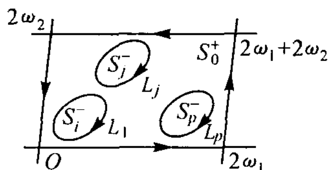


图 6.2

$$S_0^- = \sum_{j=1}^{p} S_j^-, \quad S_0^+ = \overline{P}_0 - \overline{S}_0^-,$$

而 S^+ 和 S^- 分别是 S_0^+ 和 S_0^- 及其合同区域之并. 于是，S^+ 实际上是一连通的双周期区域. 此外，还记 $L_0 = \sum_{j=1}^{p} L_j$，而 L 为 L_0 及其合同闭路之并.

一双周期函数 $\Phi(z)$，如在 S^+ 和 S^- 中全纯，连续到其边界的两侧，称为分区双周期全纯函数. 一般，$z = \infty$ 是 $\Phi(z)$ 的本性奇异点. 但在双周期问题中，“无穷远点”不起任何作用.

6.1.2　Weierstrass 函数

我们回忆与椭圆函数有关的 Weierstrass 函数的定义与性质(下文中要用到)，见于许多复分析的教材中，例如 Ahlfors [1].

一个亚纯函数(即在复平面中仅有极点为奇异点的解析函数)如以 $2\omega_1$ 与 $2\omega_2$ 为周期，称为椭圆函数.

函数

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right) \tag{6.3}$$

称为 **Weierstrass** ζ **函数**，其中 $\sum_{m,n}{}'$ 表示对所有整数 m,n 求和，但 $m = n = 0$

除外. 这是一个具有单极点 $\Omega_{mn}(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的亚纯函数，以 1 为留数，它显然是奇函数. 当然，它不是双周期的，但为双准周期的：

$$\zeta(z+2\omega_k)=\zeta(z)+2\eta_k,\quad k=1,2,\tag{6.4}$$

其中 $\eta_k=\zeta(\omega_k)$，且满足

$$2\omega_2\eta_1-2\omega_1\eta_2=\pi\mathrm{i},\tag{6.5}$$

这易于将留数定理应用于积分 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_0}\zeta(z)\mathrm{d}\zeta$ 而验证. ①

由(6.4)式，易见 $\zeta'(z)$ 是双周期的. 我们定义一偶函数

$$\mathscr{P}(z)=-\zeta'(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{m,n}{}'\left(\frac{1}{z-\Omega_{mn}^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right),\tag{6.6}$$

称为 **Weierstrass** $\mathscr{P}$ 函数，它是一椭圆函数，在 P_0 内有惟一的二阶极点 $z=0$. 经逐次求导，可知 $\mathscr{P}^{(k)}(z)=-\zeta^{(k+1)}(z)$ 是椭圆函数，在 P_0 中有惟一的 $k+2$ 阶极点 $z=0$.

下面还要用到另一函数称为 Weierstrass σ 函数，考虑 $\mathrm{e}^{\int\zeta(z)\mathrm{d}z}$，定义奇函数

$$\sigma(z)=z\prod_{m,n}{}'\left(1-\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)\exp\left\{\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z^2}{2\Omega_{mn}^2}\right\},\tag{6.7}$$

其中 $\prod\limits_{m,n}{}'$ 是对所有整数 m,n 求积，但 $m=n=0$ 除外，这里，在无穷乘积 $\mathrm{e}^{\int\zeta(z)\mathrm{d}z}$ 中出现的因子 $z-\Omega_{mn}$ 已改成了 $1-\frac{z}{\Omega_{mn}}$，以保证其收敛. $\sigma(z)$ 既不是双周期的，也不是双准周期的，它以 $z=\Omega_{mn}$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为一阶零点，而满足

$$\sigma(z+2\omega_k)=-\sigma(z)\mathrm{e}^{2\eta_k(z+\omega_k)},\quad k=1,2.\tag{6.8}$$

实际上，显然

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\zeta(z).\tag{6.9}$$

由(6.4)式，因而就有

$$\frac{\sigma'(z+2\omega_k)}{\sigma(z+2\omega_k)}=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}+2\eta_k,\quad k=1,2,$$

由此积分立得

---

① 如果 $\mathrm{Im}\,\frac{\omega_2}{\omega_1}<0$，则(6.5)式右端应改为 $-\pi\mathrm{i}$.

$$\sigma(z+2\omega_k)=C_k\sigma(z)e^{2\eta_k z},\quad k=1,2.$$

在此式中令 $z=-\omega_k$ 并注意 $\sigma(z)$ 是奇函数，立即可得 $C_k=-e^{2\eta_k\omega_k}$ 因而导出(6.8)式.

6.2　复应力函数的一般表达式

6.2.1　一般说明

在平面弹性的双周期问题中，我们考虑下列情况：弹性介质占有一双周期的连通区域 S，且应力(包括 S 边界上的外应力)也是双周期的：

$$\sigma_x(z+2\omega_k)=\sigma_x(z),\quad \sigma_y(z+2\omega_k)=\sigma_y(z),$$
$$\tau_{xy}(z+2\omega_k)=\tau_{xy}(z),\quad z\in S,\ k=1,2.\qquad(6.10)$$

根据推广的虎克定律，位移函数 $g(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 必定是双准周期的：

$$g(z+2\omega_k)=g(z)+g_k,\quad k=1,2.\qquad(6.11)$$

其中 g_1,g_2 为复常数，是 $g(z)$ 的加数. 整个弹性体的刚性平移不会改变这些加数；而绕原点的小旋转即在 z 处的位移为 $\mathrm{i}\varepsilon z$ ($|\varepsilon|>0$ 很小，见路见可[7])，这时位移的加数为 $2\mathrm{i}\varepsilon\omega_k$，$k=1,2$，这仍然不会影响到位移的双准周期性；当然它们更不会影响到应力的双周期分布.

设弹性体占有如图 6.2 中的区域 $S=S^+$，或者与 S^+ 类似的区域 S 但 P_0 中的洞 $L_1,L_2,\cdots,L_p$ 所围的内域换成了 p 条互不相交的光滑裂纹 $L_j=\widehat{a_jb_j}$，$j=1,2,\cdots,p$，取定自 a_j 到 b_j 为其正向，如图 6.3 所示. 在前一情况，用 $X_j+\mathrm{i}Y_j$ 表示洞 S_j^- 的边界闭路 L_j 上的应力主矢量；在后一情况，用 $X_j+\mathrm{i}Y_j$ 表示裂纹 $\widehat{a_jb_j}$ 两侧的外应力合主矢量. 由双周期性，作用在 P_0 两对对边上的外应力主矢量分别互相相消. 由平衡条件，应有

$$\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)=0.\qquad(6.12)$$

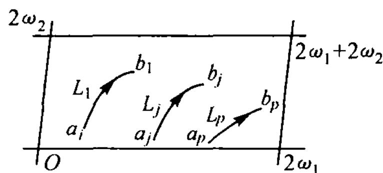


图 6.3

故若 P_0 中只有一个洞或者一条裂纹时，必有 $X_1+\mathrm{i}Y_1=0$.

我们恒设弹性体 S 是各向同性的，其弹性常数为 κ 与 μ. 我们将分别给出在洞的情况和裂纹的情况下复应力函数的一般表达式.

6.2.2 带洞区域情况

考虑双周期区域 $S = S^+$ 在 P_0 中有 p 个洞 $S_1^-, S_2^-, \cdots, S_p^-$ 的情况.

在每个洞 $S_j^-(j = 1,2,\cdots,p)$ 中取定一任意点 z_j. 根据平面弹性一般理论，由应力的双周期性，复应力函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 可表为

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j + \mathrm{i}Y_j)\log\sigma(z-z_j) + \varphi_0(z), \quad z \in S, \tag{6.13}$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_0 - \mathrm{i}Y_j)\log\sigma(z-z_j) + \psi_1(z), \quad z \in S, \tag{6.14}$$

其中 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 在 S^+ 内全纯，$\sigma(z)$ 是 Weierstrass σ 函数，而对数可任意取定一分支. 这样，它们的多值部分已经分离出来了. 经求导(并记 $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Phi_0(z) = \varphi_0'(z)$ 等)，便有

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j + \mathrm{i}Y_j)\zeta(z-z_j) + \Phi_0(z), \quad z \in S, \tag{6.15}$$

$$\Psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j - \mathrm{i}Y_j)\zeta(z-z_j) + \Psi_1(z), \quad z \in S, \tag{6.16}$$

其中 $\zeta(z) = \dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ 为 Weierstrass ζ 函数. 由(6.12)式，立即可见(6.15)式与(6.16)式中的求和部分是双周期的.

我们论断 $\Phi_0(z) = P(z) + \mathrm{i}Q(z)$ 是双周期的. 实际上，由应力的双周期性以及(2.1)式，立即知道 $P(z)$ 是双周期的，因而由 Cauchy-Riemann 方程得知$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$与$\dfrac{\partial Q}{\partial y}$也是双周期的，所以，实函数 $Q(z)$ 是双准周期的：

$$Q(z+2\omega_k) = Q(z) + \nu_k, \quad k = 1,2,$$

其中 ν_1, ν_2 为实常数. 这样，$\Phi_0(z)$ 也是双准周期的：

$$\Phi_0(z+2\omega_k) = \Phi_0(z) + \mathrm{i}\nu_k, \quad k = 1,2.$$

令

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) - A_0 z - B_0\zeta(z-z_1) \tag{6.17}$$

(记住 z_1 在洞 S_1^- 中)，其中

$$A_0 = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}(\nu_2\eta_1 - \nu_1\eta_2), \quad B_0 = \frac{1}{\pi\mathrm{i}}(\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2) \tag{6.18}$$

$(\eta_k = \zeta(\omega_k), k = 1,2)$. 由(6.4)与(6.5)式，可直接验证 $\Phi_*(z)$ 是双周期

的，在 S^+ 内全纯．将(6.17)式两端同乘以 $\frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}$ 并沿 Γ_0 积分，立即可得 $B_0=0$，因为易见 $\int_{\Gamma_0}\Phi_0(z)\mathrm{d}z=0$．因此，

$$\Phi_0(z+2\omega_k)-\Phi_0(z)=2A_0\omega_k=\mathrm{i}\nu_k,\quad k=1,2.$$

设若 $A_0\neq 0$，则 $2A_0=\frac{\mathrm{i}\nu_k}{\omega_k}$．于是 $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\nu_2}{\nu_1}$ 是实数，矛盾．所以 $A_0=0$，这就说明 $\Phi_0(z)$ 是双周期的．

由(2.2)式知，$\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)$ 必须是双周期的．由(6.16)和(6.12)式，因之 $\bar{z}\Phi'(z)+\Psi_1(z)$ 也必须是双周期的．

选取常数 A,B，使得函数

$$D(z)=Az+B\zeta(z-z_1)\tag{6.19}$$

在 S^+ 内全纯、双准周期，且以 $2\overline{\omega}_k$ 为加数：

$$D(z+2\omega_k)=D(z)+2\overline{\omega}_k,\quad k=1,2,\tag{6.20}$$

因而函数

$$m(z)=\bar{z}-D(z)\tag{6.21}$$

在 S^+ 内为双周期的(但不解析)．由(6.5)式，易于验证

$$A=\frac{2}{\pi\mathrm{i}}(\overline{\omega_2}\eta_1-\overline{\omega_1}\eta_2),\quad B=\frac{2}{\pi\mathrm{i}}(\overline{\omega_2}\omega_1-\overline{\omega_1}\omega_2),\tag{6.22}$$

后者表明 B 为实数．定义

$$\begin{aligned}\Psi_2(z)&=\Psi_1(z)+D(z)\Phi'(z)\\&=\Psi_1(z)+\bar{z}\Phi'(z)-m(z)\Phi'(z),\end{aligned}\tag{6.23}$$

它已是双周期的，且在 S^+ 内全纯．这样，我们可把(6.16)改写为

$$\begin{aligned}\Psi(z)=&\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)\zeta(z-z_j)\\&-D(z)\Phi'(z)+\Psi_2(z).\end{aligned}\tag{6.24}$$

(6.15)与(6.24)式分别为 $\Phi(z)$ 与 $\Psi(z)$ 的一般表达式，其中 $\Phi_0(z)$ 与 $\Psi_2(z)$ 已是 S^+ 内的双周期全纯函数．

回到(6.14)式，可以写

$$\begin{aligned}\psi(z)=&\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)\log\sigma(z-z_j)\\&-D(z)\Phi(z)+\psi_0(z),\end{aligned}\tag{6.25}$$

其中 $\psi_0(z)$，如同 $\varphi_0(z)$，可以确定到一常数项，其导数

$$\psi_0'(z)[=\Psi_0(z)]=\Psi_2(z)+D'(z)\Phi(z)\tag{6.26}$$

在 S^+ 内双周期全纯.(6.13)和(6.25)式分别为 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的一般表达式,其中 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 已在 S^+ 内全纯.因为 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的多值部分已经分离了出来.且因 $\varphi_0'(z)=\Phi_0(z)$,$\psi_0'(z)=\Psi_0(z)$ 是双周期的,故 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 是双准周期的:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(z+2\omega_k)&=\varphi_0(z)+\varphi_k,\\ \psi_0(z+2\omega_k)&=\psi_0(z)+\psi_k,\end{aligned}\right\}\quad k=1,2, \tag{6.27}$$

其中 φ_k,ψ_k 均为常数.

6.2.3 带裂纹区域情况

现设 P_0 中有 p 条裂纹 $L_j=\widehat{a_jb_j}$,$j=1,2,\cdots,p$(图 6.3).在 L_j 的正、负侧上外应力的主矢量分别记为 $X_j^\pm+\mathrm{i}Y_j^\pm$,其合主矢量为

$$X_j+\mathrm{i}Y_j=(X_j^++\mathrm{i}Y_j^+)+(X_j^-+\mathrm{i}Y_j^-)\quad(j=1,2,\cdots,p), \tag{6.28}$$

它们满足(6.12)式.如在 P_0 中只有一条裂纹 L_1,则

$$X_1^+=-X_1^-,\quad Y_1^+=-Y_1^-.$$

代替(6.13)与(6.14)式,现在可以写出

$$\begin{aligned}\varphi(z)=&-\frac{1}{4\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)\\ &+\varphi_0^*(z),\end{aligned} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}\psi(z)=&\frac{\kappa}{4\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)\\ &+\psi_1^*(z)\end{aligned} \tag{6.30}$$

($z\in S$),其中 $\varphi_0^*(z),\psi_1^*(z)$ 均为单值的,因为 $\varphi(z),\psi(z)$ 的多值部分已分离了出来.但是,在这两式子中求和部分在裂纹 $L_j(j=1,2,\cdots,p)$ 的端点 a_j,b_j 处有对数奇异性,故其导数在该处有一阶奇异性,这在应用中极不方便.为了克服这一缺点,我们引进函数

$$H_j(z)=\int_{L_j}h_j(t)\zeta(t-z)\mathrm{d}t,\quad t\in S,\ j=1,2,\cdots,p, \tag{6.31}$$

其中

$$h_j(t)=\frac{2t-a_j-b_j}{b_j-a_j}. \tag{6.32}$$

因为 $\zeta(t-z)$ 在 $t=z$ 处的主部是 $\frac{1}{t-z}$,且 $h_j(a_j)=1$,$h_j(b_j)=-1$,所以 $H_j(z)$ 在 $z=a_j$ 和 b_j 处与 $\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)$ 一样都有同样的对数奇异

性，因而 $\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)-H_j(z)$ 在 a_j,b_j 处有界. 于是，(6.29) 与 (6.30) 式可分别写成

$$\varphi(z)=-\frac{1}{4\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)(\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)-H_j(z))+\varphi_0(z),\quad z\in S,\tag{6.33}$$

$$\psi(z)=\frac{\kappa}{4\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)(\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)-H_j(z))+\psi_1(z),\quad z\in S,\tag{6.34}$$

其中 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_1(z)$ 在 S 中全纯，在各裂纹端点处分别有与 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 相同类型的奇异性. 顺便还可注意，因为 $\int_{L_j}h_j(t)\mathrm{d}t=0$，故 $H_j(z)$ 是双周期的.

经求导，可得

$$\Phi(z)=-\frac{1}{4\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)(\zeta(z-a_j)+\zeta(z-b_j)-H_j'(z))+\Phi_0(z),\quad z\in S,\tag{6.35}$$

$$\Psi(z)=\frac{\kappa}{4\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)(\zeta(z-a_j)+\zeta(z-b_j)-H_j'(z))+\Psi_1(z),\quad z\in S,\tag{6.36}$$

其中

$$H_j'(z)=\int_{L_j}h_j(t)\mathscr{P}(t-z)\mathrm{d}t\tag{6.37}$$

当然是双周期的.

如前段中一样，易于验证 $\Phi_0(z)$ 是双周期的. 为了考察 $\Psi_1(z)$，我们令

$$\zeta_1(z)=\frac{6}{(b_1-a_1)^3}\int_{L_1}(b_1-t)(t-a_1)\zeta(t-z)\mathrm{d}t,\quad z\in S,\tag{6.38}$$

它在 S 内全纯，在端点 $a_j,b_j(j=1,2,\cdots,p)$ 处有界，且为双准周期的：

$$\zeta_1(z+2\omega_k)=\zeta_1(z)+2\eta_k,\quad k=1,2,\tag{6.39}$$

故其加数与 $\zeta(z)$ 的相同. 代替(6.19)式中的 $D(z)$，定义

$$D_1(z)=Az+B\zeta_1(z),\tag{6.40}$$

其中 A,B 仍由(6.22)式给出. 这样，$D_1(z)$ 也有加数 $2\omega_1,2\omega_2$，因而

$$m_1(z)=\bar{z}-D_1(z)\tag{6.41}$$

是双周期的. 所以，代替(6.34)式，现在可以写

$$\Psi(z)=\frac{\kappa}{4\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)(\zeta(z-a_j)+\zeta(z-b_j)-H_j(z))-D_1(z)\Phi'(z)+\Psi_2(z),\tag{6.42}$$

其中 $\Psi_2(z)$ 由(6.26)式中把 $D(z)$ 与 $m(z)$ 分别改为 $D_1(z)$ 与 $m_1(z)$ 后定义，在 S 中已是单值、双周期的. 因为 $D_1(z)$ 在各裂纹端点处保持有界，所以它在(6.42)式中的出现会使 $\Psi_2(z)$ 与 $\Psi(z)$ 保持相同的奇异性态. (6.35)与(6.42)式就是在周期裂纹情况下应力函数的一般表达式，其中 $\Phi_0(z)$，$\Psi_2(z)$ 都是双周期全纯函数.

回到 $\psi(z)$，(6.34)式可改写为

$$\psi(z)=\frac{\kappa}{4\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)(\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)-H_j(z))$$
$$-D_1\Phi(z)+\psi_0(z),\quad z\in S. \tag{6.43}$$

这时，在(6.26)式中把 $D(z)$ 换成 $D_1(z)$ 后，仍保持成立. (6.33)与(6.43)分别为现在讨论的情况下应力函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的一般表达式：$\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 是双准周期的，其加数仍分别记为 φ_k，$\psi_k(k=1,2)$.

6.3 双周期基本问题

6.3.1 有关双准周期函数的加数间的关系

在讨论双周期基本问题之前，我们要弄清楚应力函数 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 以及位移函数 $g(z)$ 中分别出现的加数 φ_k，ψ_k 以及 $g_k(k=1,2)$ 之间有什么关系.

首先，我们介绍某些力学量. 设 P_0 边界 Γ_0 上外应力为 $X_n(\tau)+\mathrm{i}Y_n(\tau)$ $(\tau\in\Gamma_0)$，于是作用在 Γ_k 上的外应力主矢量为

$$F_k=\int_{\Gamma_k}(X_n(\tau)+\mathrm{i}Y_n(\tau))\mathrm{d}\sigma\quad(k=1,2,3,4), \tag{6.44}$$

其中 σ 为 Γ 上的弧长参数. 由双周期条件，$F_3=-F_1$，$F_4=-F_2$. 令

$$f(\tau)=\mathrm{i}\int_0^{\tau}(X_n(t)+\mathrm{i}Y_n(t))\mathrm{d}\sigma,^{①}\ \tau\in\Gamma_0. \tag{6.45}$$

它在 Γ_0 上是单值的，因为在整个 Γ_0 上应力合主矢量为零. 显然

$$F_k=-\mathrm{i}[f(\tau)]_{\Gamma_k}. \tag{6.46}$$

这就表明

$$[f(\tau)]_{\Gamma_1}=f(2\omega_1)-f(0)=f(2\omega_1),$$
$$[f(\tau)]_{\Gamma_2}=f(2\omega_1+2\omega_2)-f(2\omega_1).$$

① 确切说来，式中 $\mathrm{d}\sigma$ 为 $\mathrm{d}\sigma(t)$，而 τ 为 $\tau(\sigma)$.

由(2.35)式，我们知道

$$\varphi(\tau)+\tau\overline{\varphi'(\tau)}+\overline{\psi(\tau)}=f(\tau)+\text{const},\quad \tau\in\Gamma_0, \tag{6.47}$$

所以

$$[\varphi(\tau)+\tau\overline{\varphi'(\tau)}+\overline{\psi(\tau)}]_{\Gamma_k}=\mathrm{i}F_k,\quad k=1,2,3,4. \tag{6.48}$$

首先考虑带洞区域情况.

利用 $\sigma(z)$ 的性质(6.8)式：

$$\sigma(z-z_j+2\omega_k)=-\mathrm{e}^{2\eta_k(z-z_j+\omega_k)}\sigma(z-z_j),$$
$$k=1,2;\ j=1,2,\cdots,p, \tag{6.49}$$

将其代入(6.13)和(6.25)式，并注意(6.12)式，便有

$$\frac{1}{\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)(\eta_k z_j-\kappa\overline{\eta_k}\,\overline{z_j})+\varphi_k+\overline{\psi_k}=\mathrm{i}F_k,$$
$$k=1,2. \tag{6.50}$$

另一方面，类似地代入(2.3)式，便有

$$\frac{2\kappa}{\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)\mathrm{Re}\{\eta_k z_j\}+\kappa\varphi_k-\psi_k=2\mu g_k,$$
$$k=1,2, \tag{6.51}$$

这是因为$[g(\tau)]_{\Gamma_k}=g_k\ (k=1,2)$.

由(6.50)与(6.51)式，立即得到

$$\left.\begin{aligned}\varphi_k&=-\frac{\eta_k}{\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)z_j+\frac{1}{\kappa+1}(\mathrm{i}F_k+2\mu g_k),\\ \psi_k&=\frac{\kappa\eta_k}{\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)z_j-\frac{1}{\kappa+1}(\mathrm{i}\kappa\overline{F_k}+2\,\overline{g_k}),\end{aligned}\right\}$$
$$k=1,2. \tag{6.52}$$

此外，我们来考虑 Γ_0 上外应力的主矩 M_0. 显然，它在 $\Gamma_1+\Gamma_2$ 上相应的部分为$\frac{1}{2}M_0$，而作用在 L_0 上的主矩 $M_{L_0}=-M_0$.

我们来找出 M_0 与 F_k 之间的关系. 令 $\tau=\xi+\mathrm{i}\eta$. 于是，

$$M_0=\int_{\Gamma_0}(\xi Y_n(\tau)-\eta X_n(\tau))\mathrm{d}\sigma=\mathrm{Im}\int_{\Gamma_0}\tau(X_n(\tau)+\mathrm{i}Y_n(\tau))\mathrm{d}\sigma.$$

另一方面，由应力的双周期性，可知

$$\left.\begin{aligned}X_n(\tau+2\omega_k)&=-X_n(\tau),\\ Y_n(\tau+2\omega_k)&=-Y_n(\tau),\end{aligned}\right\}\quad \tau\in\Gamma_k,\ k=1,2.$$

因此，由上面的等式得知

$$M_0 = -M_{L_0} = 2\,\mathrm{Im}\{\omega_1 F_2 - \omega_2 F_1\}. \tag{6.53}$$

同时，我们可找出 M_0 与 ψ_k 之间的关系. 因为(见 Мусхелишвили [1] 或路见可[7])

$$M_0 = -\mathrm{Re}\int_{\Gamma_0} \tau\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

由 $\Psi(\tau)$ 的双周期性，立得

$$M_0 = 2\,\mathrm{Re}\{\omega_2[\psi(\tau)]_{\Gamma_1} - \omega_1[\psi(\tau)]_{\Gamma_2}\}.$$

以(6.25)代入，并利用(6.12)式，可以看到

$$M_0 = 2\,\mathrm{Re}\Big\{\omega_2\Big[\frac{\kappa\eta_1}{\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j - \mathrm{i}Y_j)z_j - 2\omega_1\Phi(0) + \psi_1\Big]$$

$$-\omega_1\Big[\frac{\kappa\eta_2}{\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j - \mathrm{i}Y_j)z_j - 2\,\overline{\omega_2}\Phi(0) + \psi_2\Big]\Big\},$$

而由(6.5)与(6.15)式，经化简后有

$$M_0 = -\frac{\kappa}{\kappa+1}\mathrm{Im}\Big\{\sum_{j=1}^{p}(X_j - \mathrm{i}Y_j)z_j\Big\}$$

$$+\frac{2}{\pi(\kappa+1)}\mathrm{Re}\Big\{(\omega_1\,\overline{\omega_2} - \overline{\omega_1}\,\omega_2)\sum_{j=1}^{p}(X_j + \mathrm{i}Y_j)\zeta(z_j)\Big\}$$

$$+2\,\mathrm{Re}\{\omega_2\psi_1 - \omega_1\psi_2\} + 4\,\mathrm{Re}\{\omega_1\,\overline{\omega_2} - \overline{\omega_1}\omega_2\}\Phi_0(0). \tag{6.54}$$

因为 $\varphi(z)$ 增加一项 $\mathrm{i}\varepsilon z$ (ε 为实数) 不会改变应力分布，因此我们恒可设 $\Phi_0(0)$ 为实数，即

$$\mathrm{Im}\,\varphi_0'(0) = \mathrm{Im}\,\Phi_0(0) = 0. \tag{6.55}$$

于是(6.54)右端最后一项可略去：

$$M_0 = -\frac{\kappa}{\kappa+1}\mathrm{Im}\Big\{\sum_{j=1}^{p}(X_j - \mathrm{i}Y_j)z_j\Big\}$$

$$+\frac{2}{\pi(\kappa+1)}\mathrm{Re}\Big\{(\omega_1\,\overline{\omega_2} - \overline{\omega_1}\,\omega_2)\sum_{j=1}^{p}(X_j + \mathrm{i}Y_j)\zeta(z_j)\Big\}$$

$$+2\,\mathrm{Re}\{\omega_2\psi_1 - \omega_1\psi_2\}. \tag{6.54$'$}$$

由(6.53)式和(6.54)′式，可得 ψ_1,ψ_2 与 F_1,F_2 之间的一关系式. 实际上，在条件(6.55)之下，可得

$$\mathrm{Re}\{\omega_2\psi_1 - \omega_1\psi_2\}$$

$$= \frac{\kappa}{2(\kappa+1)}\mathrm{Im}\Big\{\sum_{j=1}^{p}(X_j - \mathrm{i}Y_j)z_j\Big\}$$

$$-\frac{1}{\pi(\kappa+1)}\mathrm{Re}\Big\{(\omega_1\,\overline{\omega_2} - \overline{\omega_1}\omega_2)\sum_{j=1}^{p}(X_j + \mathrm{i}Y_j)\zeta(z_j)\Big\}$$

$$+\operatorname{Im}\{\overline{\omega_1}F_2-\overline{\omega_2}F_1\}. \tag{6.56}$$

特别，当在每一 L_j 上的外应力主矢量为零时，即 $X_j+\mathrm{i}Y_j=0$ 时，(6.52) 与 (6.56) 式分别成为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_k&=\frac{1}{\kappa+1}(\mathrm{i}F_k+2\mu g_k),\\ \psi_k&=-\frac{1}{\kappa+1}(\mathrm{i}\kappa\overline{F_k}-2\mu g_k),\end{aligned}\right\}\quad k=1,2, \tag{6.57}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{\omega_2\psi_1-\omega_1\psi_2\}&=\operatorname{Im}\{\overline{\omega_1}F_2-\overline{\omega_2}F_1\}=\frac{2\mu}{\kappa+1}\operatorname{Re}\{\omega_2g_1-\omega_1g_2\}\\ &=\frac{1}{2}M_0=-\frac{1}{2}M_{L_0}.\end{aligned} \tag{6.58}$$

此外，由上列诸式，还可断言

$$\operatorname{Re}\{\overline{\omega_2}\varphi_1-\overline{\omega_1}\varphi_2\}=0. \tag{6.59}$$

其次，考虑带裂纹区域情况. 如前推导，注意 $H_j(z)$ 是双周期的，易见 (6.50) 与(6.51) 式现在分别成为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)[\eta_k(a_j+b_j)-\kappa\overline{\eta_k}(\overline{a_j}+\overline{b_j})]\\ &+\varphi_k+\overline{\varphi_k}=\mathrm{i}F_k,\quad k=1,2,\end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\kappa}{\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)\operatorname{Re}\{\eta_k(a_j+b_j)\}\\ &+\kappa\varphi_k-\overline{\psi_k}=2\mu g_k,\quad k=1,2,\end{aligned} \tag{6.61}$$

于是(6.52) 成为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_k&=-\frac{\eta_k}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j+\mathrm{i}Y_j)(a_j+b_j)+\frac{1}{\kappa+1}(\mathrm{i}F_k+2\mu g_k),\\ \psi_k&=\frac{\kappa\eta_k}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{p}(X_j-\mathrm{i}Y_j)(a_j+b_j)-\frac{1}{\kappa+1}(\mathrm{i}\kappa\overline{F_k}+2\mu\overline{g_k}),\end{aligned}\right\}$$

$$k=1,2. \tag{6.62}$$

相仿地，当每一裂纹 L_j 两侧上的外应力合主矢量 $X_j+\mathrm{i}Y_j=0$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 时，等式(6.57) ～ (6.60) 保持不变.

注　上述讨论可以推广到在弹性区域中既有洞又有裂纹的情况，这不会有大的困难.

6.3.2　基本问题的提法

在上述讨论之后，我们可以给出**双周期基本问题**的一般提法. 我们将论

证带洞区域的情况. 一切记号如前.

对双周期第一基本问题，外应力 $X_n(t)+\mathrm{i}Y_n(t)$，$t\in L$ 已给出，它当然是双周期的. 但是，仅仅这样不足以保证弹性平衡解的唯一性. 除此之外，例如，还要分别给出 Γ_1 和 Γ_2 上的应力主矢量 F_1,F_2. 在这样的条件下，可以建立问题的解的唯一性.

实际上，如果 L 上的 $X_n(t)+\mathrm{i}Y_n(t)=0$ 且 $F_1=F_2=0$，则易见"能量积分"

$$\begin{aligned}J&=\int_{L_0}(X_nu+Y_nv)\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_0}(X_nu+Y_nv)\mathrm{d}\sigma\\&=\mathrm{Re}\left\{\int_{\Gamma_0}(X_n+\mathrm{i}Y_n)g(\tau)\mathrm{d}\sigma\right\}\\&=2\,\mathrm{Re}\{g_1F_2-g_2F_1\}=0,\end{aligned}\tag{6.63}$$

因而 S^+ 内的所有应力等于零(见 Мусхелищвили [1]). 这就等价于第一基本问题解的唯一性. 但应注意，因为 $X_n+\mathrm{i}Y_n$ 已知于 L 上，故

$$M_{L_0}=\int_{L_0}(yX_n-xY_n)\mathrm{d}s$$

也是一已知数；由(6.53)式，

$$\mathrm{Im}\{\overline{\omega}_1F_2-\overline{\omega}_2F_1\}=-\frac{1}{2}M_{L_0}\tag{6.64}$$

也已知，因而 F_1,F_2 不能任意给出而必须满足这一条件.

我们的**双周期第一基本问题**是要求解

$$\begin{aligned}&\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C_j(m,n),\\&\qquad t\in L_j(m,n)=\{t\mid t-\Omega_{mn}\in L_j\},\end{aligned}\tag{6.65}$$

其中

$$f(t)=\mathrm{i}\int_{t_j}^{t}(X_n(t)+\mathrm{i}Y_n(t))\mathrm{d}s,\quad t\in L_j\tag{6.66}$$

(t_j 为 L_j 上的任一固定点)，且已双周期延拓于 L 上，而 $C_j(m,n)$ 为待定常数 $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 将(6.13)与(6.25)式代入(6.65)，我们可以得到 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 所要满足的边界条件：

$$\begin{aligned}\varphi_0(t)+m(t)\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}&=f_0(t)+C_j(m,n),\\&\qquad t\in L_j(m,n),\end{aligned}\tag{6.67}$$

其中 $f_0(t)$ 是一已知的单值双周期函数. 这是相当于化为了所有 $X_j+\mathrm{i}Y_j=0$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 的情况. 我们下面恒作此假定. 求解此边值问题，实际上只要求解下列边值问题即可：

$$\varphi_0(t)+m(t)\,\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=f_0(t)+C_j,$$
$$t\in L_j,\ j=1,2,\cdots,p, \qquad (6.68)$$

其中 $C_j=C_j(0,0)$ 为待定常数，而其他 $C_j(m,n)$ 可自然地由 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 的加数确定.

我们恒假定条件(6.55) 满足. 现因 $X_j+\mathrm{i}Y_j=0$，故有

$$\varphi_k+\mathrm{i}\,\overline{\varphi_k}=\mathrm{i}F_k,\quad k=1,2. \qquad (6.69)$$

又因 $f_0(t)$ 在各 L_j 上为单值，故在(6.58) 中，

$$M_{L_0}=\mathrm{Re}\left\{\int_{L_0}f_0(t)\mathrm{d}\bar{t}\right\}. \qquad (6.70)$$

因此，一旦 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 如已求出，易证：用两种不同方式考虑 M_0，便可证实(6.57) 成立，从而当然(6.58) 也就成立.

总结起来，不失一般性，对双周期第一基本问题，恒可假设在每 $L_j(j=1,2,\cdots,p)$ 上外应力主矢量 $X_j+\mathrm{i}Y_j=0$，要寻求两个双准周期的全纯函数 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 满足边值条件(6.68) ($C_1,C_2,\cdots,C_p$ 为待定常数)，已知分别在 Γ_1 和 Γ_2 上的外应力主矢量 F_1 和 F_2 满足下列条件者：

$$\mathrm{Im}\{\overline{\omega_1}F_2-\overline{\omega_2}F_1\}=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_{L_0}f(t)\mathrm{d}\bar{t}\right\}, \qquad (6.71)$$

还附加要求 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 的加数满足(6.69). 这里已设(6.55) 式满足. 此外，易于验证：为了解 $\varphi_0(z),\psi_0(z)$ 的唯一性(不是指应力分布的唯一性)，可以再要求 $\varphi_0(0)=\psi_0(0)=0$；如事先已指定 $C_1=0$，只要求 $\varphi_0(0)=0$ 或 $\psi_0(0)=0$ 即可.

条件(6.59) 与(6.58) 可作为对 φ_k,ψ_k 公式的检验.

对于**双周期第二基本问题**，已知每一 L_j 上的位移函数 $g(t)$ $(j=1,2,\cdots,p)$ 以及加数 g_1,g_2，求弹性平衡. 现在 $X_j+\mathrm{i}Y_j$，$j=1,2,\cdots,p$，为待定的. 它可以化为双准周期边值问题：

$$\kappa\varphi_0(t)-m(t)\,\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{\psi_0(t)}=g_0(t),$$
$$t\in L_j,\ j=1,2,\cdots,p, \qquad (6.72)$$

其中 $g_0(t)$ 中含有 $g(t)$ 的项外，还含有以待定常数 $X_j+\mathrm{i}Y_j(j=1,2,\cdots,p)$ 为系数的项，但这时没有类似于(6.71) 式(F_1,F_2 换作 g_1,g_2) 那样的补充要求，为了唯一确定 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$，易证，只要要求 $\varphi_0(0)=0$ 或 $\psi_0(0)=0$ 即可.

对于第一或第二基本双周期问题解的存在性可以在求解过程中实现，例如，如同非周期情况一样(参看路见可[7])，可将其化为某种 Fredholm 积分

方程，其核函数含有 Weierstrass ζ 函数或 $\wp$ 函数.

类似地，也可考虑带裂纹的双周期弹性基本问题，这时 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 在各裂纹端点有可积奇异性. 求解这种问题时，没有原则性的困难，可将其化为核函数中含有 Weierstrass ζ 函数的奇异积分方程.

所有这些，我们就不再详细论述了. 郑可[1],[2] 在这方面也做了一些工作；李星也曾做了一系列工作，并在其专著[1] 中加以总结.

附　　录

平面弹性循环周期问题

在各向同性周期平面弹性问题中，除了单周期和双周期情况外，还有一种**循环周期问题**，或称为**循环对称问题**. 为了周期问题的完整性，在本附录中将简单介绍在这种情况下的复应力函数表达式. 由于在路见可[7]中对这种问题有较详细的讨论，这里就不再重复了.

设平面中弹性区域 S 关于某点，不妨设为原点，循环对称，即将它绕原点旋转 $\frac{2\pi}{n}$ ($n \geqslant 2$ 为正整数) 角后 S 保持不变，且在 S 的边界 L 上外应力也保持不变，则这种问题就称为**循环周期问题**，而 $\omega = \omega_n = \frac{2\pi}{n}$ 称为**循环常数**. 这类问题在实际应用中常见. 从原则上讲，这时的第一、第二基本问题等只是非周期情况的特例，因而可用已有的方法求解. 但可以想到，利用循环对称的特点，将会使求解问题的方法大大简化，因而有必要专门讨论. 这里，我们仅就其复应力函数的特点及其一般表达式进行讨论.

在循环对称情况下，显然用极坐标代替直角坐标较为方便. 记 $z = x + \mathrm{i}y = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$z \in S$，而应力函数记为 σ_ρ, σ_θ 和 $\tau_{\rho\theta}$，位移函数则记为 $v_\rho + \mathrm{i}v_\theta$. 熟知(参看 Мусхелишвили [1] 或路见可[7])：定义 $\Phi(z)$ 与 $\Psi(z)$ 如前，

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\rho + \sigma_\theta &= 2(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}), \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2\mathrm{i}\tau_{\rho\theta} &= 2(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z))\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}, \\ 2\mu(v_\rho + \mathrm{i}v_\theta) &= (\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \end{aligned}\right\} \quad z \in S. \tag{1}$$

由循环对称性，在 z 与 ωz 处以极坐标给出的应力函数和位移函数应相等，即(1) 式中的 z 改为 ωz 时其右端应相等. 故由(1) 中第一式知，

$$\mathrm{Re}\,\Phi(\omega z) = \mathrm{Re}\,\Phi(z),$$

因此 $\mathrm{Re}\,\Phi(\omega z) = \Phi(z) + \mathrm{i}\delta(z)$，其中 $\delta(z)$ 为一实函数. 但因 $\Phi(z)$ 和 $\Phi(\omega z)$ 都是 S 中的全纯函数，所以 $\delta(z)$ 也是的. 从而 $\delta(z) = \delta$ 只能是一实常数：

$$\Phi(\omega z) = \Phi(z) + \mathrm{i}\delta \quad (\delta \text{ 为实常数}). \tag{2}$$

将此式对 z 求导，得

$$\Phi'(\omega z)=\overline{\omega}\Phi'(z)\quad (\text{因为}\frac{1}{\omega}=\overline{\omega}).$$

再由(1) 中第二式右端当 z 改为 ωz 时的不变性，并利用上式，便知

$$\Psi(\omega z)=\overline{\omega}^2\Psi(z). \tag{3}$$

将(2) 和(3) 式求积分，由(1) 式中右端 z 改为 ωz 的不变性，便可得知

$$\overline{\omega}\varphi(\omega z)=\varphi(z)+\mathrm{i}\delta z+a,$$
$$\omega\psi(\omega z)=\psi(z)+b,$$

其中 a,b 为某二复常数. 但应注意，如果 S 是多连通区域(包括带洞或(和)带裂纹的有界与无界区域)，一般说来，$\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 为多值解析函数. 这时，上面两式中的 $\varphi(\omega z)$ 与 $\psi(\omega z)$ 要这样理解：对某点 $z\in S$，先取定 $\varphi(z),\psi(z)$ 之值；当 z 沿 S 中某一确定路径变到 ωz 时，便得 $\varphi(\omega z),\psi(\omega z)$ 之值；而当 z 连续变动时，这一路径也连续变动，于是 $\varphi(z),\psi(z)$ 在 z 的某一邻域中取定一单值分支，$\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 在 ωz 的相应邻域中也就有确定的单值分支，且当前者换成另一单值支时，后者也换成另一单值支.

将以上两式应用于(1) 中第三式右端，并利用它 z 改成 ωz 的不变性时，可以得出

$$\kappa(\mathrm{i}\delta z+a)+\mathrm{i}\delta z-b=0,$$

从而

$$\delta=0,\quad b=\kappa\overline{a}.$$

这样，我们便有

$$\Phi(\omega z)=\Phi(z),\quad \Psi(\omega z)=\overline{\omega}^2\Psi(z), \tag{4}$$
$$\varphi(\omega z)=\omega\varphi(z)+A,\quad \psi(\omega z)=\overline{\omega}\psi(z)+\kappa\overline{A},$$

其中 $A=\omega a$ 为一复常数. 但因把 $\varphi(z)$ 改为 $\varphi(z)+C$，同时 $\psi(z)$ 改为 $\psi(z)+\mathrm{i}C$ (C 为任意复常数) 时，既不改变应力也不改变位移，所以，如果取 $C=\dfrac{A}{\omega-1}$，就有

$$\varphi(\omega z)=\omega\varphi(z),\quad \psi(\omega z)=\overline{\omega}\psi(z). \tag{5}$$

(4) 和(5) 式就是在循环对称情况下复应力函数的特性.

当 S 为多连通域时，最好能把 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的多值部分分离开来.

先考虑 S 为带洞的有界区域情况. 这时 S 的外面边界为一循环对称的封闭曲线 L_0. 如果原点 O 不在 S 内，亦即它在 S 的某个洞内，那么这个洞的边界也是循环对称的封闭曲线，记为 L_{m+1}；如果 $O\in S$，则这个洞当然不存在，

L_{m+1} 也就没有了. 在一个循环周期区域

$$S_k: \frac{(2k-1)\pi}{n} \leqslant \arg z \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad z \in S \ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

中，还可能有 m 个洞，其边界分别为 $L_{1k}, L_{2k}, \cdots, L_{mk}$（也可能不存在这些洞，即 $m=0$）. 对固定的 j $(1 \leqslant j \leqslant m)$，$L_{j0}, L_{j1}, \cdots, L_{j,n-1}$ 是循环周期合同的. 我们记 $L_{j0} = l_j$. 又分别记 L_0, L_{m+1} 在 S_0 中的弧段为 $l_0 = \widehat{a_0 b_0}$，$L_{m+1} = \widehat{a_{m+1} b_{m+1}}$. 这样，$S$ 在 S_0 中的部分其边界为 $l = \sum_{j=0}^{m+1} l_j$. 我们取 L_0 的反时针向为正向，而其余的边界曲线取顺时针向为正向，于是 S 的整个边界也有了正向，且 S 在其正侧：$S = S^+$. 这时 l 也有了正向，再适当补充，可得 S_0 的边界的正向，且 S_0 在其正侧：$S_0 = S_0^+$.

由循环对称性，L_0 与 L_{m+1} 上外应力主矢量必然为 0. 设在 $l_j = L_{j0}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ 上外应力主矢量为 $X_j + \mathrm{i}Y_j$. 于是，在 L_{jk} 上的必为 $(X_j + \mathrm{i}Y_j)\omega^k$. 在 $L_{j0} = l_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ 所围内域即洞中任取一点 z_j，而在 L_{jk} 所围内域中取相应点 $\omega^k z_j$，则由一般理论知，

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \sum_{j,k} (X_j + \mathrm{i}Y_j)\omega^k \log(z - \omega^k z_j) + \varphi_0(z), \quad z \in S, \tag{6}$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)} \sum_{j,k} (X_j - \mathrm{i}Y_j)\overline{\omega}^k \log(z - \omega^k z_j) + \psi_0(z), \quad z \in S, \tag{7}$$

其中 $\varphi_0(z)$ 与 $\psi_0(z)$ 已在 S 中单值、全纯，对数支可任意选定，$\sum\limits_{j,k}$ 为对 j 从 1 到 m 求和，k 从 0 到 $n-1$ 求和. 当 z 沿 S 内一确定路径变到 ωz 时，如果认定

$$\log(\omega z - \omega^k z_j) = \log(z - \omega^{k-1} z) + \frac{2\pi \mathrm{i}}{n},$$

则由(5) 式易见

$$\varphi_0(\omega z) = \omega \varphi_0(z), \quad \psi_0(\omega z) = \overline{\omega}\,\psi_0(z), \tag{8}$$

由此可知

$$\Phi_0(\omega z) = \Phi_0(z), \quad \Psi(\omega z) = \overline{\omega}^2 \Psi(z). \tag{9}$$

这些便是循环对称情况下复应力函数的特性.

如果 S 是带洞无界区域，则在(6) 与(7) 式右端还要分别加上 Γz 与 $\Gamma' z$ 的项，Γ 与 Γ' 为与无穷远处应力有关的常数. 还可注意，当 L_{m+1} 不存在即

$O \in S$ 时，由(8)式应有 $\varphi_0(0) = \psi_0(0) = 0$；当 S 为无界域即 L_0 不存在时，应有 $\varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = 0$.

当 S 为带循环周期裂纹的区域时，其应力函数也有与(6)和(7)式类似的公式，这里就不写出了，但(8)和(9)式仍成立.

由于循环周期应力有如上的特性，故在求解第一、第二基本问题等时，就可化为求解在 l 上的积分方程，而不必在整个 L 上讨论，自然简便多了.

参 考 文 献

路见可

[1] 周期 Riemann 边值问题及其在弹性力学中的应用[J]. 数学学报，1963，13(3)：343-388.

[2] 带裂缝的无限弹性平面基本问题[J]. 武汉大学学报(自然科学版，数学专号)，1963(2)：50-66.

[3] 关于周期应力平面弹性基本问题[J]. 力学学报，1964，7(4)：316-327.

[4] 周期应力平面弹性理论中的一点注记[J]. 武汉大学学报(自然科学版)，1980(3)：9-10.

[5] 具周期裂缝的无限弹性平面问题[J]. 中南矿冶学院学报，1980(1)：9-19.

[6] 解析函数边值问题[M]. 第 2 版. 武汉：武汉大学出版社，2004.

[7] 平面弹性复变方法[M]. 第 3 版. 武汉：武汉大学出版社，2005.

蔡海涛(Cai Hai-tao)

[1] 关于半平面的周期 Riemann-Hilbert 问题[J]. 中南矿冶学院学报，1979(1)：105-112.

[2] 各向同性弹性平面理论的周期接触问题[J]. 中南矿冶学院学报，1979(1)：113-126.

[3] 平面弹性理论的周期接触问题[J]. 应用数学学报，1979，2(3)：131-139.

[4] 关于半无限各向异性弹性介质的第一与第二基本周期问题[J]. 1979，11(3)：240-247.

[5] 平面各向异性弹性介质的周期裂纹问题[J]. 数学物理学报，1982，2(1)：35-44.

[6] A periodic array of cracks in an infinite anisotropic medium. Engineering Fracture Mechanics，1993，46：127-131.

[7] The crack problem of two bounded half orthotropic plane materials

Engineering Fracture Mechanics. 1995, 52: 895-900.

[8] An application of complex analysis to periodic movable loading problems. Complex Variables, 1996, 30: 145-131.

唐立民

[1] 弹性平面上相邻几个圆孔的应力分析[J]. 科学记录，1959，10: 366-375.

周承倜等

[1] 弹性平面上无限多网状排列圆孔的应力计算(一)[J]. 大连工学院学刊，1960(1): 99-125.

李国平等

[1] 自守函数与闵可夫斯基函数[M]. 北京：科学出版社，1979.

刘士强

[1] 弹性长条的周期基本问题[J]. 数学杂志，1984，4(2): 165-174.

郝天护(等)

[1] 双周期裂纹区域中反平面问题解的封闭形式[J]. 清华大学学报，1979，19(3): 11-18.

[2] 非均匀双周期裂纹区域中的反平面问题[J]. 应用数学与力学，1985，6: 191-196.

李星(Li Xing)

[1] Applications of Doubly Quasi-periodic Boundary Value Problems in Elasticity Theory. Shaker Verlag, Berlin, 2001.

马道玮

[1] 复合材料的周期裂纹问题[J]. 数学物理学报，1985，5(1): 31-41.

郑可(Zhen Ke)

[1] 双周期平面弹性的基本问题[J]. 数学物理学报，1988，8: 95-104.

[2] 具有双周期裂纹的弹性平面基本问题[J]. 数学物理学报，1988，8: 321-326.

[3] 不同介质拼接半平面的周期裂纹问题[J]. 工程数学学报，1993，10(1): 8-16.

[4] On the mixed problems in an elastic plane with periodic cracks. 数学杂

志，1994，14(1)：33-40.

[5] On the fundamental problems in an infinite anisotropic elastic plane with periodic cracks. Proc. of the Sixth China-Japan Symposium on BEM, Nov. 1994：19-24.

Лехницкий С. Г.

[1] 各向异性板[M]. 北京：科学出版社，1963 (根据 1947 年俄文版译).

Михлин С. Г.

[1] 积分方程及其应用[M]. 上海：商务印书馆，1955 (根据 1949 年俄文版译).

Мусхелишвили Н. И.

[1] 数学弹性力学中的几个基本问题[M]. 北京：科学出版社，1958 (根据 1954 年俄文版译).

[2] 奇异积分方程[M]. 北京：科学出版社，1966 (根据 1960 年俄文版译).

Панасюк В. В. , Саврук М. П. , Дацишии О. П.

[1] Інтегральне рівняиия подвіинопе-ріодичної задачі теорії трішин. ДАН УРСР, серія А. , 1974, №. 1.

Парис П. , Су Дж

[1] Анализ напряженного состояния околотрещин. Прикладные вопросы вязкости разрушения, М. , 《Мир》, 1968.

Райкерус А. А.

[1] Припожение метода последовательных приближений к решению полного сингулярного интегрального уравнения 1 рода. Уч. Зап. Петрозаводского УН-т2, 1963, 11(5)：3-6.

Савин Г. Н.

[1] 孔附近的应力集中[M], 北京：科学出版社，1968(根据 1951 年俄文版译).

[2] Напряжения в упругой плоскости с бесконечным рядом равныи вырезов. ДАНССР, 1939, 23：515-519.

Саврук М. П.

[1] Двоякопериодическая система трещии продольного сдвига в упругом

теле. Прикл. Мех. , 1975, 11(12): 113-117.

Тусупов М. Т.

[1] К решению второй основной задачи теории упругости. Труды Ин-Та Мат. н Мех. АН КазССР, Т. 1, 1976.

Шермам Д. И.

[1] Метод интегральных уравнений в плоских и пространствениых задачах. Труды всесоюзного сьезла по теоретической и прикладной механике, М. -Л. , 1962: 405-467.

森口繁一

[1] 平面弹性论[M]. 上海：上海科学技术出版社，1960(根据 1957 年日文版译).

Babuška I. , Rektorys K. , Vyăichlo F.

[1] Mathematische Elastizitastheorie der ebenen Probleme. Bertin, 1960.

Baker C. T. H.

[1] The numerical treatment of integral equations. Oxford, 1977.

Bueckner H. F.

[1] Some stress singularities and their computation by means of integral equations. Boundary Problems in Differential Equations, Madison, 1960: 215-230.

Dundurs J. , Tsai K. C. , Keer L. M.

[1] Contact between elastic bodies with wave surfaces. Jour. Elast. , 1973, 3: 109-115.

Dmowsha R. , Kostrov B. V.

[1] A shearing crack in a semi-space under plane strain condition. Arch. Mech. Stas. , 1973, 25: 421-440.

Erdogan F.

[1] Mixed boundary value problems in mechanics. Mechanics Today, 1978, 4: 1-87.

[2] Fracture problems in composite materials. J. Engng. Fract. Mech. , 1972, 4: 811-840.

Erdogan F., Gupta G. D.

[1] On the numerical solution of singular integral equations. Quart. Appl. Math., 1972, 29: 525-534.

[2] The problem of edge cracks in an infinite strip. J. Appl. Mech., 1974, 41: 1001-1006.

Gladwell G. M. L.

[1] Contact problems in the classical theory of elasticity. Sijthoff & Noordhoff, 1980.

Gupta G. D., Erdogan F.

[1] The problem of edge cracks in an infinite strip. J. Appl. Mech., 1974, 41: 1001-1006.

Howland R. C. J.

[1] Stress in a plate containing an infinite row of holes. Proc. of the Royal London Soc., Ser. A, 1935, 148, 471-491.

Ioakimidis N. I.

[1] The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities. 1980, 13: 709-716.

Isida M.

[1] On some plane problems of an infinite plate containing an infinite row of circular holes. Bull. JSME., 1960, 3(10), 259-265.

Karihaloo B. L.

[1] Fracture of solids containing arrays of cracks. Engng. Fract. Mech., 1979, 12: 49-77.

Koiter W. T.

[1] An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. Ingenieur Archiv, 1959, 28: 168-172.

[2] Stress distribution in an infinite elastic sheet with a doubly-periodic set of equal holes. Boundary Problems in Differential Equations, Madison, 1960: 191-213.

[3] An infinite row of parallel cracks in an infinite elastic sheet. Problems of Continuous Mechaics (Contributions in honor of the 70-th birthday

of N. I. Muskhelishvilli), Philadelphia, 1961: 246-259.

Krenk S.

[1] On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations. Ser. Mech. Appl., 1976, 32: 479-484.

[2] On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kinds. Ser. Mech. Appl. , 1975, 33: 225-232.

[3] Periodic contact and crack problems in plane elasticity. Let. Appl. Engng. Sci. , 1976, 4: 343-353.

Kuznetsov E. A.

[1] Periodic fundamental mixed problem of elastic theory for a half-plane. Prik. Meh. , 1976, 12(9): 89-97.

Panasyuk V. V. , Savruk M. P. , Datsyshyn A. P.

[1] A general method of solution of two-dimensional problems in the theory of cracks. Engng. Fracture Mech. , 1977, 1: 481-497.

Sih G. C. , Liebowitz H.

[1] Mathematical theories of brittle fracture, in "Fracture" (ed. by H. Liebowitz), 2. Acad. Press, 1968: 67-190.

Sneddon I. N.

[1] 富利叶变换[M], 北京, 科学出版社, 1958(根据 1951 年英文版译).

[2] Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, North Holland, 1966.

[3] The use of integral transforms. New York, McGraw-Hill, 1972.

[4] Integral transform methods for the solution of mixed boundary value problems in the classical theory of elastostatics. Application of Integral Transfoms in the Theory of Elasticity(Edited by Sneddon I. N.), CISM, Udine, Italy, 1975: 1-99.

Theocarit P. S. , Stassinakis A.

[1] Complex stress intensity factors at tips of cracks along interfaces of dissimilar media. Eng. Fract. Mech. , 1981, 14: 361-372.

[General Information]
书名=平面弹性周期问题概论
作者=路见可，蔡海涛著
页数=156
SS号=12031139
DX号=
出版日期=2008.6
出版社=武汉大学出版社